UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

CENTRE DE RECHERCHE SUR LES TRANSPORTS

MÉMOIRE D'ÉTUDIANT

CASE POSTALE 6128, STATION A, MONTRÉAL, QUÉBEC, H3C 3J7

MODELES DE LOCALISATION DANS UN CONTEXTE URBAIN

par

Basile Kamdoum

Université de Montréal
Centre de recherche sur les transports - Publication # 108
Avril 1977

TABLE DES MATIÈRES

Sommaire iii

Introduction 1

Chapitre premier: Modèle de prévision 6

1.1 Introduction 6

1.2 Localisation d'équilibre lorsqu'il n'y a pas d'interaction entre ménages localisés. 11

1.3 Prise en charge des coûts de transport 20

1.4 Prise en charge des capacités des lieux d'emploi 33

1.5 Conclusion 38

Chapitre deuxième: Quelques extensions du modèle de prévision . . . 39

2.1 Introduction 39

2.2 Extension au cas des ménages divisibles. 39

2.3 Formulation stochastique 46

2.4 Utilisation des modèles développés pour la simulation de la croissance urbaine 48

2.5 Conclusion 52

Chapitre troisième: Modèle de planification du développement du sol. 54

3.1 Introduction 54

3.2 Interactions entre entités du système. 55

3.3 Modèle de planification dans le cas où il n'y a pas d'interaction directe entre activités localisées (Hypothèse 1) 58

3.4 Modèle de planification dans le cas où il y a interaction entre activités localisées (Hypothèse 2) 60

3.5 Allocation en quantités discrètes. 74

3.6 Allocation de supercommodités (en quantités discrètes) . . 76

3.7 Conclusion 77

Chapitre quatrième: Aspects algorithmiques des méthodes présentées. 79

4.1 Introduction 79

4.2 Chemins les plus courts conditionnés 79

4.3 Problèmes posés par les économies d'échelle et les nouveaux projets 82

4.4 Conclusion 85

Chapitre cinquième: Exemple numérique 86

5.1 Introduction 86

5.2 Paramètres de l'exemple et configuration urbaine 87

5.3 Le programme 93

5.4 Complexité en espace mémoire 94

5.5 Série de résultats 96

5.6 Conclusion 118

Conclusion 119

Appendice: Algorithme pour la programmation convexe 120

Remerciements. 122

Références 123

SOMMAIRE

Dans cette thèse nous traitons les problèmes suivants: premièrement, étant donné les prévisions de la population dans un contexte urbain pour un horizon à moyen ou à long terme, on voudrait pouvoir prévoir la configuration que prendra la ville à ce moment, étant donné que chaque individu choisit son logement et se déplace entre son logement et son travail de façon à minimiser sa désutilité totale; deuxièmement, on se place dans le même contexte, mais cette fois on s'intéresse à la localisation de services publics ou contrôlables, en supposant qu'il existe une autorité centrale dont l'objectif est de minimiser la désutilité totale du système.

Sous des hypothèses explicitées, nous avons formulé ces problèmes en utilisant la théorie des flots sur les réseaux, de façon à ce qu'ils puissent être résolus par des méthodes algorithmiques éprouvées.

Ce travail s'inscrit dans le cadre de la mise au point de méthodes de calcul efficaces pour l'analyse des problèmes urbains de grande taille.

INTRODUCTION

Le but de ce travail est l'étude du problème de la localisation des ménages et des services publics, dans un contexte urbain. Le problème de la croissance urbaine est l'un des plus complexes que les planificateurs peuvent rencontrer. Les relations entre les diverses entités de la ville — par exemple entre les quartiers résidentiels et les centres récréatifs, les quartiers résidentiels et les services administratifs — , l'individualité des ménages dans un grand nombre de leurs choix, les réglementations administratives, le perpétuel changement des opinions, goûts et en conséquence de l'utilisation des services, tels sont pour n'en citer que ceux-là des sujets complexes et difficiles à caractériser et contrôler. Dans la littérature sur la planification urbaine, plusieurs des problèmes mentionnés ont été abordés.

Une classe de modèles suppose le système de transport urbain fixe et a pour objectif la recherche du plan de développement du sol le plus désirable et le moins coûteux. Les modèles les plus simples de cette approche constituent ce que l'on appelle habituellement en recherche opérationnelle le problème du sac alpin; on peut trouver une exposition de ce problème dans Bellman [2] ou Denardo [7]. D'autres modèles plus réalistes du point de vue du phénomène urbain décrivent le problème de la prévision de l'utilisation du sol comme un problème classique de transport (Wheaton [26]); une présentation détaillée du problème classique de transport et de ses variantes se trouve dans Dantzig [6]. Un modèle dont l'objectif est de présenter le plan d'utilisation du sol le

moins coûteux pour la collectivité présuppose qu'il existe une autorité centrale capable de contrôler le développement des diverses entités de la ville. Dans le problème du développement des résidences par exemple, le caractère individuel de la décision de chaque ménage ne peut être négligé. Alonso [1] a établi des conditions sous lesquelles on peut considérer le marché du logement comme dans un certain équilibre. Herbert et Stevens [14] ont proposé un modèle de programmation mathématique dont la solution devrait vérifier les conditions d'Alonso. Il a été prouvé (Wheaton [36]) que le modèle de Herbert et Stevens ne fournit pas toujours une solution ayant une telle propriété. Wheaton propose une méthode itérative, mais dont la convergence n'est pas assurée. A cause de ces problèmes de calcul, nous reviendrons sur ces modèles.

En ce qui concerne les aspects et interprétations économiques des modèles d'équilibre, sujet que nous ne voulons pas aborder dans la thèse, une discussion ainsi qu'une bibliographie se trouve dans Mills et Mackinnon [26]; la plupart des auteurs, dans cette optique traitent les cas de ville monocentrique (Solow [34], Mills [27]). Il est impossible dans le cadre de ce travail de donner une appréciation réelle de ces approches.

L'importance de certains projets, par exemple du problème de décider quel site doit être choisi pour servir de quartier résidentiel ou industriel, fait en sorte que l'intervention d'une autorité administrative est nécessaire. Beaucoup d'auteurs ont développé des modèles de développement de ressources publiques dans le contexte urbain; parmi ceux qui traitent du développement du réseau on peut citer R. Dionne [8],

L.J. LeBlanc [19] et G.L. Nemhauser [29]. Dans la classe de modèles traitant du développement des ressources publiques dans un contexte urbain et plus précisément du développement du sol ou du réseau, les travaux les plus complets actuellement sont ceux qui traitent du choix simultané du plan d'utilisation du sol et du réseau de transport (M. Los [20], L. Lundqvist [22]). Comme pour les problèmes d'équilibre, nous reviendrons sur certains problèmes de calcul que peuvent poser ces méthodes, laissant de côté les aspects économiques; une présentation détaillée de divers aspects économiques et des techniques de calcul pour les modèles urbains se trouve dans [17]. Mentionnons aussi qu'Oron, Pines et Sheshinski [31] donnent une comparaison entre les modèles de planification et les modèles d'équilibre; d'autres méthodes sont présentées dans Dixit [9]. Un autre problème que nous ne traiterons pas dans cette thèse est celui de la modélisation des coûts entrant dans les formulations; nous énoncerons les hypothèses que doivent satisfaire les coûts pour que les méthodes présentées soient valides.

L'un des problèmes que l'on rencontre lors de la modélisation de systèmes urbains est celui de la définition du "coût". Le problème de programmation mathématique type consiste à chercher l'optimum d'une fonction définie sur un ensemble donné et à valeurs réelles; cette fonction représente souvent un coût, et dans ce cas l'optimum et le minimum associé aux variables. Soit par exemple le problème de construction d'un hôpital à capacité fixée d'avance; supposons qu'il existe un certain nombre de places où cet hôpital pourrait être construit. La variable du problème ici est le lieu et on peut considérer comme coût associé, le

prix d'acquisition de ce lieu; dans ce cas, le terme coût est clairement défini. Si par contre on fait intervenir, outre le coût d'acquisition du lieu, le problème posé par la facilité de la population d'avoir accès à cet hôpital, le coût lié à la variable lieu n'est plus clairement défini. On pourrait prendre comme coût, une combinaison du coût d'acquisition du terrain et des distances du lieu aux quartiers résidentiels, mais quelle combinaison? On pourrait transformer l'accessibilité en coût monétaire, mais quelle transformation prendre? Ces problèmes ont soulevé beaucoup d'intérêt en recherche, et aujourd'hui les méthodes acceptées pour leur résolution sont la programmation à objectifs multiples. Ces techniques sont discutées entre autres par Benayoun et Tergny [3], Markowitz [25], Geoffrion [11] et Dyer [10]. Un problème de planification urbaine ne se résout pas en soumettant un programme à l'ordinateur: il y a nécessairement un processus interactif entre les planificateurs qui choisissent éventuellement avec l'aide de l'ordinateur des plans possibles, et les collectivités qui prennent connaissance de ces alternatives, évaluent les conséquences et en acceptent une ou les rejettent. Le planificateur peut générer un grand nombre de solutions aux problèmes à objectifs multiples grâce à une implantation interactive du code sur ordinateur; tout ceci constitue la méthodologie que nous estimons adéquate pour aborder les problèmes urbains. On montre facilement que résoudre un problème à objectifs multiples revient à résoudre une série de problèmes de programmation mathématique. De même si la fonction objectif d'un problème de programmation mathématique est la somme de plusieurs coûts de nature différente, alors la méthode de résolution de ce problème et de celui que

l'on résout à chaque étape lors du cas à objectif multiples sont équivalentes. Nous nous contenterons donc de formuler les problèmes, en terme de problèmes de programmation mathématique.

Pour les deux types de problèmes que nous voulons aborder, à savoir la recherche de localisation d'équilibre et la planification de la localisation, le but de l'étude sera essentiellement de construire des méthodes de calcul. Pour ce, nous considérerons les modèles les plus évolués de la littérature (le modèle de localisation d'équilibre de Wheaton et le modèle de choix simultané de plan de développement et du réseau de transport de Lundqvist); nous nous concentrons sur l'aspect calcul de ces méthodes, nous proposerons sous des hypothèses explicites, des formulations tenant compte du plus grand nombre possible de phénomènes traités par ces modèles de référence, mais pouvant être résolues par des méthodes exactes éprouvées et aussi pouvant être utilisées pour des problèmes de grande taille.

Le travail comporte essentiellement deux parties: dans une première partie nous abordons le problème de prévision à moyen ou à long terme de la configuration urbaine et dans la deuxième partie nous abordons le problème de planification des ressources publiques dans le cas spécifique de l'utilisation du sol en présence d'un planificateur central.

CHAPITRE PREMIER

1. Modèle de prévision

1.1 Introduction

Bien que le milieu urbain soit continuellement en changement, il présente une structure macroscopique stable (spécialisation des quartiers) pendant un temps durant lequel un ménage peut à plusieurs reprises changer de logement jusqu'à se fixer définitivement (le temps que la structure macroscopique de la ville change) . Le problème que nous allons étudier est celui de la prévision de l'utilisation du sol due à l'installation d'une certaine quantité de nouveaux ménages. Nous sommes en présence des propriétaires de terrains et logements qui louent ou cèdent leurs biens aux prix les plus élevés possibles et des ménages qui veulent des logements commodes et aux moindres frais; nous nous trouvons alors dans une situation de marché.

Plusieurs auteurs, notamment Alonso [1], sous l'hypothèse que les conditions de marché sont accessibles à tous les intéressés, ont postulé que la configuration urbaine résultante satisfait aux conditions d'équilibre suivantes:

(E_1) : tous les ménages sont localisés

(E_2) : la demande est égale à l'offre

(E_3) : un lieu va seulement à l'utilisation garantissant le gain par unité de surface le plus élevé

- un ménage est localisé à une seule place, celle au coût par acre le plus élevé
- le coût par surface occupée d'un ménage à un lieu donné est au moins aussi élevé que le coût par surface occupée des ménages localisés ailleurs
- tous les ménages localisés à un lieu donné ont le même coût.

Divers aspects du problème d'équilibre urbain sont abordés dans la littérature. Une discussion générale des méthodes se trouve dans Mills [26]; après avoir relevé les avantages et inconvénients des représentations continues et discrètes de la ville, cet auteur suggère l'adoption de la représentation discrète, surtout à cause des avantages qu'elle peut apporter au niveau du calcul pratique. La plupart des modèles, discrètes ou continues -- par exemple, Mills [26], Dixit [9] et Solow [34] présente la ville comme étant monocentrique, ce qui en facilite certainement la représentation mathématique. Wheaton [36] présente une formulation discrète, non nécessairement monocentrique; il serait intéressant de présenter sommairement cette approche.

Ce sont Herbert et Stevens [14] qui en 1960 ont les premiers abordé ce problème par la programmation linéaire; leur approche a été reprise par Wheaton [36].

Le programme de Herbert et Stevens a la forme:

$$\text{Max} \sum_{k=1}^{K} \sum_{s=1}^{S} \sum_{t=1}^{T} (R_{kst} - c_t)\, h_{kst} \qquad (1)$$

$$\text{S.a} \sum_k \sum_t u_t h_{kst} = A_s,\ s=1,\ldots,S \tag{2}$$

(P1)

$$\sum_s \sum_t h_{kst} = f_k,\ k=1,\ldots,K \tag{3}$$

$$h_{kst} \geq 0,\ k=1,\ldots,K;\ s=1,\ldots,S;\ t=1,\ldots,T \tag{4}$$

où A_s est la quantité de terrains disponibles en s

f_k le nombre total de ménages du groupe k

c_t le coût de construction de logements de type t

u_t l'utilisation de terrains qu'entraîne un logement de type t

R_{kst} le montant que le ménage de type k est prêt à payer pour un logement de type t en s.

Le dual du problème est:

$$\text{Min} \sum_{s=1}^{S} \ell_s A_s + \sum_{k=1}^{K} v_k f_k \tag{5}$$

$$\text{s.a.}\quad u_t \ell_s + v_k \geq (R_{kst} - C_t),\ t=1,\ldots,T;\ k=1,\ldots,K;$$

(P2)

$$s=1,\ldots,S \tag{6}$$

$$\ell_s,\ v_k \geq 0,\ k=1,\ldots,K;\ s=1,\ldots,S \tag{7}$$

Si h_{kst} (h_{nmp}) est une variable quelconque dans la base (hors-base) alors les écarts complémentaires impliquent l'inégalité:

$$\frac{v_n}{u_p} - \frac{v_k}{u_t} \geq \frac{(R_{nmp} - C_p)}{u_p} - \frac{(R_{kst} - C_t)}{u_t} \tag{8}$$

Wheaton en déduit que les conditions d'équilibre ne sont satisfaites que si $\frac{v_n}{u_p} - \frac{v_k}{u_t} \leq 0$, ce que la solution optimale de (P1) ne peut garantir;

Wheaton présente une version de (P1) pouvant fournir une solution d'équilibre. Pour cela (P1) est converti en un problème de transport afin d'accélérer le calcul et garantir une solution d'équilibre. Le calcul se fait dans un processus itératif: on calcule les coûts par l'évaluation d'une fonction d'utilité, on adapte le second membre des contraintes, on résoud le problème de transport et ainsi de suite; à chaque itération on calcule le niveau d'utilité de chaque groupe de ménages, on déduit le gain maximal du propriétaire, en s (quand un ménage du groupe k choisit le lieu s); Hopkins [15] suggère surtout aux agences publiques de déterminer les prix duaux et les prix des logements ou lieux de façon à ce que, chaque ménage cherchant à minimiser son coût de localisation à un endroit commode, le système soit amené à un équilibre qui soit un optimum social. Nous ferons les remarques suivantes sur ces modèles:

1) le coût de voyage des ménages entre leur domicile et les services est exogène à (P1); dans un processus itératif une série de ces coûts est calculée et pour chaque élément de la série (P1) est résolue. Malheureusement le processus n'est pas nécessairement convergent.

2) Pour la modélisation du phénomène d'offre-demande, on peut tenir compte de la constatation suivante: au niveau de chaque site, les propriétaires sont prêts à vendre plus cher s'il se présente plus de ménages désireux de prendre un logement; les ménages cherchent parmi les logements, les plus commodes et les moins chers. Dans le modèle de Herbert-Stevens si le coût total de localisation d'une quantité h_s en s est $c_s(h_s)$, alors le coût de localisation de αh_s, $\alpha > 0$ est $\alpha c_s(h_s)$; la constatation

précédente voudrait que l'on ait $c_a(\alpha h_s) > \alpha c_s(h_s)$, $\alpha > 1$, qui en d'autres termes veut dire que plus il y a de gens qui veulent de logement plus un logement coûte cher.

3) La valeur du logement (terrain) étant la manifestation de la demande de celui-ci, il est impossible que les terrains vaillent plus cher que ce que les ménages sont prêts à (capables de) payer; alors à priori on peut éliminer toute interprétation des valeurs duales de (P1) en termes de subsides.

Nous essayerons, au besoin en posant des hypothèses supplémentaires, d'écrire une formulation mathématique permettant le calcul exact, même dans le cas de grande taille, des solutions ayant les propriétés spécifiques d'équilibre que nous énoncerons.

Si l'on fait l'hypothèse que lorsque la demande est égale à l'offre les prix sont uniquement déterminés, alors les conditions E_2 et E_3 sont équivalentes. Cette hypothèse nous permet de poser les conditions d'équilibre suivantes:

(E_1') : tous les ménages sont localisés

(E_2') : aucun ménage ne peut améliorer son choix en changeant de lieu de localisation et aucun propriétaire ne peut améliorer son revenu en changeant de locataire.

Notons que (E_2') traduit bien le fait que la demande est égale à l'offre.

Dans tout le texte, à moins de spécification, les mots conditions d'équilibre désigneront (E_1') et (E_2').

Dans un premier temps nous allons considérer le problème posé par Herbert et Stevens, c'est-à-dire la recherche de la localisation d'équilibre dans le cas où l'on ne tient pas compte du coût du voyage des ménages entre leur domicile et les lieux de services divers (marché, récréation, etc...); par la suite nous laisserons tomber cette restriction.

1.2 Localisation d'équilibre lorsqu'il n'y a pas d'interaction entre ménages localisés

Dans ce paragraphe nous considérons le problème de choix de logements sous les hypothèses suivantes:

- l'ensemble des résidences est regroupé en S quartiers géographiques;
- l'ensemble des ménages est subdivisé en K groupes homogènes suivant des critères tels que la taille du ménage, le revenu, etc...;
- dans chaque quartier les logements sont subdivisés en catégories suivant qu'ils sont susceptibles d'être demandés par l'un ou l'autre des groupes de ménages;
- les ménages connaissent parfaitement le marché du logement;
- il y a compétition parmi les ménages du même groupe dans la recherche du logement le plus commode (le moins coûteux), mais pas d'interaction entre deux groupes différents de ménages;
- il y a compétition parmi les propriétaires dans la recherche des locataires (acheteurs) les plus offrants;
- le coût du logement est le critère prépondérant du choix (on ne tient pas compte de l'accessibilité au travail ou aux divers services dans la ville).

Nous allons montrer que sous ces hypothèses il existe une localisation d'équilibre:

Soient $S = \{1,2,\ldots,S\}$ l'ensemble des lieux de localisation, $K = \{1,2,\ldots,K\}$ l'ensemble des types de ménages et S_k l'ensemble des lieux de localisation pour les ménages du groupe k. La fonction de coût de localisation au lieu s est notée $c_s(.)$; $c_s(h_s)$ est le coût de localisation d'un ménage en s lorsqu'une quantité totale h_s de ménages est localisée en s. Si h_{ks} est le nombre de ménages du groupe k localisés en s, on a alors $h_s = \sum_{k=1}^{K} h_{ks}$. Nous supposerons que le coût de localisation $c_s(h_s)$ est une fonction continue et strictement croissante; on a alors $h_s' > h_s^2 \Rightarrow c_s(h_s') > c_s(h_s^2)$. Nous estimons que cette hypothèse est en général conforme à la réalité; il faut tout de suite noter que si pour un certains cas cette hypothèse n'est pas vérifiée, toutes les conclusions du développement que nous allons faire ne sont plus valides. Une allocation qui satisfait les conditions (E_1') et (E_2') est une allocation d'équilibre; si on appelle f_k la quantité totale de ménages de type k à localiser, alors la condition (E_1') s'écrit:

$$\sum_{s\in S_k} h_{sk} = f_k,\ k=1,\ldots,K \qquad (9)$$

$$h_{sk} \geq 0,\ s=1,\ldots,S;\ k=1,\ldots,K \qquad (10)$$

Appelons π_k le prix payé par un ménage quelconque de type k. S'il y a équilibre alors aucun ménage de type k ne paye un prix supérieur à π_k et aucun propriétaire ne peut accepter un prix inférieur à π_k; ceci constitue la condition (E_2'); elle prend alors la forme:

$$c_s(h_s) > \pi_k \Rightarrow h_{ks} = 0 \tag{11}$$

$$h_{ks} > 0 \Rightarrow c_s(h_s) = \pi_k \tag{12}$$

$$\pi_k \geq 0 \tag{13}$$

Montrons comment trouver une telle solution d'équilibre. Considérons pour ce, le problème suivant:

$$\text{Min} \sum_{s=1}^{S} \int_0^{h_s} c_s(y)dy \tag{14}$$

(P3)

$$\text{s.a.} \sum_{s\in S_k} h_{ks} = f_k, \quad k=1,\ldots,K \tag{15}$$

$$h_{ks} \geq 0, \qquad \begin{matrix} k=1,\ldots,K \\ s=1,\ldots,S \end{matrix} \tag{16}$$

$$\text{où } h_s = \sum_{k=1}^{K} h_{ks}, \quad s=1,\ldots,S$$

Le Lagrangien de ce problème a la forme

$$L = \sum_{s=1}^{S} \int_0^{h_s} c_s(y)dy + \sum_{k=1}^{K} \pi_k \{f_k - \sum_{s\in S_k} h_{ks}\} - \lambda_{ks} h_{ks} \tag{17}$$

Les conditions d'optimalité pour le problème sont:

$$\nabla L = 0 \tag{18}$$

$$\sum_{s\in S_k} h_{ks} = f_k, \quad k=1,\ldots,K \tag{19}$$

$$h_{ks} \geq 0, \quad k=1,\ldots,K; \; s=1,\ldots,S \tag{20}$$

$$\pi_k \geq 0, \quad k=1,\ldots,K \tag{21}$$

$$\lambda_{ks} \geq 0, \quad k=1,\ldots,K; \; s=1,\ldots,S \tag{22}$$

qui s'écrivent encore:

$$\left.\begin{array}{l} c_s(h_s) - \pi_k - \lambda_{ks} = 0 \quad , \\ \pi_k \geq 0,\ \lambda_{ks} \geq 0,\ h_{ks} \geq 0 \ , \end{array}\right\} \begin{array}{l} k=1,\ldots,K \\ s=1,\ldots,S \end{array} \qquad (23)\ (24)$$

$$\sum_{s\in S_k} h_{ks} = f_k,\ k=1,\ldots,K \qquad (25)$$

En éliminant λ_{ks} de ces équations on obtient:

$$[c_s(h_s) - \pi_k]h_{ks} = 0 \qquad (26)$$

$$\left.\begin{array}{l} h_{ks} \geq 0 \\ c_s(h_s) - \pi_k \geq 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} k=1,\ldots,K \\ s=1,\ldots,S \end{array} \qquad (27)\ (28)$$

$$\sum_{s\in S_k} h_{ks} = f_k,\ k=1,\ldots,K \qquad (29)$$

$$\pi_k \geq 0 \qquad k=1,\ldots,K \qquad (30)$$

qui s'écrivent encore:

$$h_{ks} > 0 \Rightarrow c_s(h_s) = \pi_k \qquad (31)$$

$$c_s(h_s) > \pi_k \Rightarrow h_{ks} = 0 \qquad (32)$$

$$\left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \begin{array}{l} k=1,\ldots,K \\ s=1,\ldots,S \end{array}$$

$$c_s(h_s) - \pi_k \geq 0 \qquad (33)$$

$$\sum_{s\in S_k} h_{ks} = f_k \quad , k=1,\ldots,K \qquad (34)$$

$$h_{ks} \geq 0,\ \pi_k \geq 0 \quad , k=1,\ldots,K;\ s=1,\ldots,S \qquad (35)$$

Ce qui correspond aux conditions d'équilibre recherchées. Le problème (P3) fournit donc une méthode de recherche d'une localisation d'équilibre.

Pour prouver l'unicité de la solution représentée par les conditions (31) - (35) nous avons besoin des résultats suivants:

Lemme 1

Soient $c: [a,b] \to R$ une fonction et

$$f(x) = \int_a^x c(t)dt$$

Si c(.) est monotone et strictement croissante

alors f(.) est strictement convexe.

Lemme 2

Toute somme finie de fonctions convexes est convexe.

Ces lemmes se prouvent sans difficulté (Shah [32], Mangasarian [24]).

Les contraintes de (P3) sont linéaires; d'après les lemmes ci-dessus la fonction objectif de (P3) est convexe; nous avons donc un problème de programmation convexe à contraintes linéaires (plus précisément un problème de transport à coût convexe). La solution de (P3) est donc unique.

Nous allons présenter une adaptation de l'algorithme de Frank et Wolfe [11] pour résoudre (P3).

Algorithme

Etape 1

. pour tout k dans K, trouver s^* tel que

$c_{s^*}(0) = \min_s \{c_s(0)\}$ et affecter tout f_k à s^*

. Choisir le paramètre de tolérence ε

. $n \leftarrow 1$; appeler $\underset{\sim}{\bar{h}}^n$ la distribution des f_k obtenue.

Etape 2

Résoudre le problème

$$\text{Min} \sum_k \sum_{s(k)} c_c(\bar{h}_s^n)\, h_{ks} \tag{36}$$

$$\text{s.a. } f_k = \sum_s h_{ks},\ s \text{ dans } S_k, \text{ pour tout } k \tag{37}$$

$$h_{ks} \geq 0 \quad , \text{ pour tout } s, \text{ pour tout } k \tag{38}$$

où $s(k)$ indique que s est choisi dans S_k, S_k étant l'ensemble des lieux de localisation potentiels des ménages du groupe k. (38)

soit $\underset{\sim}{h}^{*n}$ la solution obtenue.

$$\text{Si } \left| \sum_k \sum_{s(k)} c_{s(k)}(\bar{h}_s^n)\ (h_{ks}^{*n} - \bar{h}_{ks}^n) \right| < \varepsilon \quad \text{arrêter} \tag{39}$$

sinon aller à l'étape 3.

Etape 3

Résoudre le problème

$$\text{Min} \sum_s \int_0^{h_s^{\lambda^n}} c_s(x)dx \tag{40}$$

$$0 \leq \lambda^n \leq 1$$

$$\text{où} \quad h_s^{\lambda^n} = \sum_k \left(\bar{h}_{ks}^n + \lambda^n (h_{ks}^{*n} - \bar{h}_{ks}^n)\right) \tag{41}$$

Soit $\bar{\lambda}^n$ la solution de ce problème.

$$\text{Faire } \bar{h}_{ks}^n \leftarrow \bar{h}_{ks}^n + \bar{\lambda}^n \ (h_{ks}^{*n} - \bar{h}_{ks}^n) \tag{42}$$

$$n \leftarrow n + 1 \ .$$

Aller à l'étape 2.

Nous n'avons fait aucune hypothèse restrictive sur les capacités des lieux de localisation et il en est de même pour le partage de certains lieux par des groupes de ménages différents. Nous supposerons dans la suite que la capacité d'un lieu s est reflétée dans la fonction de coût $c_s(.)$; cette supposition ne règle pas tout le problème posé par la capacité des lieux étant donné que le prix d'acquisition du lieu, fixé par le propriétaire, peut dans certains cas dépasser la somme qu'un ménage est prêt (capable de) à payer. Introduisons la notation suivante:

$\hat{\pi}_k$ sera le prix qu'un ménage du groupe k est prêt (capable de) payer; c'est par exemple un certain pourcentage de son salaire. Considérons le problème suivant:

$$\text{Min} \sum_{s=1}^{S} \int_0^{h_s} c_s(x)dx \tag{43}$$

$$\text{(P4)} \qquad \text{s.a.} \sum_{s \in S_k} h_{ks} = f_k \ , \quad h=1,\ldots,K \tag{44}$$

$$h_{ks} \geq 0 \quad , k=1,\ldots,k;\ s=1,\ldots,S \tag{45}$$

$$h_{ks}\,[c_s(h_s) - \hat{\pi}_k] \leq 0\ ,\ k=1,\ldots K;\ s=1,\ldots,S \tag{46}$$

La contrainte (46) s'écrit encore $h_{ks} > 0 \Rightarrow c_s(h_s) \leq \hat{\pi}_k$; ce qui veut dire qu'aucun ménage ne paie plus qu'il ne peut.

Avant de présenter l'utilité de (P4) dans la discussion du problème de localisation, notons tout de suite que la fonction $h_{ks}\,[c_s(h_s) - \hat{\pi}_k]$ n'est pas nécessairement convexe; néanmoins on vérifie facilement que si la dérivée seconde $\ddot{c}_s(.)$ de la fonction de coût $c_s\,(.)$ est non-négative alors $h_{ks}[c_s(h_s)-\hat{\pi}_k]$ est convexe.

La propriété suivante dit dans quelle condition (P4) fournit sûrement une solution qui est l'unique localisation d'équilibre.

Propriété 1

Soit $f_s = \sum_{\{k \mid s \in S_k\}} f_k$, où S_k est l'ensemble des lieux de localisation potentiels pour les ménages du groupe k.

Si $c_s(f_s) \leq \hat{\pi}_k$ pour tout k et pour tout s alors la solution de (P4) est l'unique localisation d'équilibre.

Cette propriété est faible puisque si elle est vérifiée, la contrainte (46) est toujours vérifiée; néanmoins en testant d'avance cette condition, on peut choisir une méthode plus appropriée de recherche de la localisation d'équilibre. Il faut remarquer que si cette condition n'est pas vérifiée, il peut toujours y avoir une solution d'équilibre. Nous allons nous intéresser maintenant à ce qui se passe quand cette condition n'est pas vérifiée, c'est-à-dire quand il existe s dans S_k tel que $c_s(h_s) > \hat{\pi}_k$, $h_s \leq f_k$.

Il n'est pas facile de former des aggrégats de ménages tels que l'ensemble des lieux de localisation potentiels d'aggrégats différents soient disjoints. Pour fixer les idées, chaque lieu de S_k doit pouvoir contenir physiquement les membres d'une famille du groupe k et le prix actuel d'un logement dans S_k doit au plus être égal à ce qu'un ménage du groupe k peut payer. Pour interpréter les solutions de (P3) comme critère de spécialisation des quartiers, introduisons les définitions suivantes:

$\tilde{S}_k$ sera l'ensemble des lieux pour lesquels les solutions du programme mathématique choisi pour chercher la localisation d'équilibre fournit $h_{ks} \geq 0$ (l'ensemble des lieux où l'on prévoit une localisation non nulle de membres du groupe k); on a évidemment $\tilde{S}_k$ dans S_k.

$\hat{\pi}_k$ sera le prix payé par un membre du groupe k pour une localisation dans $\tilde{S}_k$ (le prix fournit par la solution de (P3)).

Nous supposons dans ce qui suit qu'il y a des logements pour tout le monde (la capacité de logement de la ville est infiniment extensible). Nous avons la propriété suivante:

Propriété 2 (Loi de spécialisation des quartiers)

Ou bien $\tilde{S}_k \cap \tilde{S}_{k'} = \phi$ ou bien $\hat{\pi}_k = \hat{\pi}_{k'}$

Preuve: immédiat à partir des conditions d'équilibre (31) - (33)
Cette propriété caractérise les spécialisations des quartiers (ghettos) en termes de prix de logement, elle ne dit pas comment les ghettos se forment. Elle dit tout simplement que deux ménages de groupes différents

et payant des prix de logement différents n'ont pas de lieux de localisation de même type.

Sous les hypothèses condisérées, la formulation (P3) permet donc d'établir l'existence et l'unicité d'une solution vérifiant les conditions d'équilibre posées (E_1') et (E_2'), et surtout de calculer une telle solution de façon exacte et dans le cas de problème de grande taille.

Il est clair que dans la réalité le choix d'un logement donné par un ménage est motivé par un grand nombre de critères. Wheaton introduit dans son approche une fonction d'utilité pour tenir compte, outre le coût de localisation, du coût de transport occasionné par les voyages qu'engendrent les quartiers résidentiels. Nous proposerons dans la suite une modélisation de la prise en charge de ces coûts de transport.

1.3 Prise en charge des coûts de transport

Pour le problème précédent, nous avons supposé qu'il n'y avait pas de compétition entre ménages de groupes différents, sauf dans le choix du logement; nous allons lever cette restriction et traiter le cas où il y a compétition, d'une part dans l'utilisation du réseau de transport reliant les divers quartiers de la ville et d'autre part dans le choix du logement, entre groupes différents et à l'intérieur du même groupe de ménages. En ce qui regarde la relation entre un ménage localisé et l'utilisation du réseau de transport nous supposerons qu'un ménage engendre un seul type de voyage (notamment de type domicile-travail) et que le taux de remplissage du véhicule utilisé est un. Nous allons commencer par caractériser les coûts qui

doivent entrer dans la construction du modèle.

Chaque ménage doit payer un coût lié à son logement (loyer, acquisition); appelons S_k l'ensemble des lieux potentiels de localisation des ménages de type k; S_k est évidemment un sous ensemble de S. Le ménage doit aussi payer un coût lié à ses déplacements: les déplacements entre des lieux donnés sont faits par l'intermédiaire d'un réseau de transport dont les arcs sont notés $A = \{1,2,\ldots,A\}$ et les sommets $N = \{1,2,\ldots,N\}$; les nouveaux ménages doivent évidemment choisir leur lieu de travail; l'ensemble des lieux de travail est $\mathcal{D} = \{1,2,\ldots,D\}$.et l'ensemble de lieux de travail potentiels pour les ménages de type k, $\mathcal{D}_k$. En plus des coûts directs de logement et de déplacement, il faut tenir compte des coûts liés à la localisation dans des sites incommodes; plus précisément on a les coûts suivants:

1) coût de localisation

Appelons $c_s(h_s)$ le coût de localisation d'un ménage en s lorsque s possède h_s ménages; l'une des conditions d'équilibre recherchée stipule que la demande est égale à l'offre et nous avons remarqué que dans cette condition les prix sont uniquement déterminés; nous avons fait appel, pour les constatations,à la loi de l'offre et de la demande classique de l'économie et plus précisément à la relation entre le prix et la demande; cette relation dit que le prix augmente avec la demande on a donc la relation $c_s(h_s^2) > c_s(h_s^1)$ pour $h_s^2 > h_s^1$.

2) coût de transport (circulation)

Appelons $c_a(h_a)$ le coût de transport d'une unité de flot sur l'arc a du réseau lorsque le flot total sur cet arc est h_a; il est naturel de supposer $c_a(h_a^2) > c_a(h_a^1)$ pour $h_a^2 > h_a^1$.

3) coûts de pénalité aux origines

Les ménages sont répartis en groupes homogènes (suivant le revenu, la taille,...). Nous présentons ici deux aspects supplémentaires du comportement des ménages.

a) les ménages aux revenus élevés ont une plus grande valeur du temps (temps d'accès au travail)

b) les ménages aux revenus élevés ont une moindre valeur des loyers (ils sont prêts à payer plus cher)

Tenir compte de a) et b) rend le problème délicat; remarquons d'abord que la valeur liée aux conditions physiques (écologiques, touristiques,...) d'un lieu s est reflétée dans le coût $c_s(.)$ de localisation. Chaque groupe de ménages homogène désire un type moyen de logement (ils affectent une certaine proportion de leur revenu à cela). Il est normal que des éléments du groupe oscillent autour de cette valeur standard; ils peuvent prendre des logements plus chers à leurs dépens, ou moins chers (moins commodes), à condition de les ramener à leur standard (rénovation, ...); tout ce comportement est rationnel; il y a lieu de croire que certains individus ne choisissent pas suivant ces critères rationnels, mais nous excluons ici la tâche de modéliser le comportement non rationnel

des gens et faisons la supposition qu'en moyenne les gens se comportent de façon rationnelle.

Appelons s_0 l'un des lieux où les ménages du groupe k ont leur logement standard moyen et $c_{ks_0}(h)$ le coût de rénovation (possiblement nul) lié à la localisation d'un ménage de groupe k en s_0 lorsqu'il y a une quantité h de ménages en s_0. Appelons $c_{ks}(.)$ la fonction de coût de rénovation à un lieu quelconque s, s différant de s_0; $c_{ks}(0)$ sera donc le coût nécessaire pour ramener un logement en s au standard moyen et $c_{ks}(h)$ le coût de rénovation d'un logement en s losqu'il y a h ménages en s. Pour un lieu s, $c_{ks}(h)$ traduit le goût d'un ménage du groupe k pour logement au lieu s; nous l'avons identifié comme étant le coût de rénovation, cependant il peut être différent du coût monétaire de rénovation de logement au lieu s. On peut supposer que ce coût ne dépend pas du nombre de ménages du groupe k voulant se localiser en s.

Toutes les hypothèses sur les coûts sont minimales, et nous les estimons réalistes; l'idée essentielle est que ces coûts doivent modéliser exactement le phénomène de l'offre ou de la demande suivant les circonstances. Ce qui est certain c'est que ces coûts sont strictement croissants et monotones, ce qui va nous suffire pour établir le théorème d'existence et d'unicité d'une solution d'équilibre.

Théorème

Si $c_{ks}(.)$, $c_s(.)$ et $c_a(.)$ sont monotones strictement croissantes alors il existe une et une seule solution d'équilibre.

preuve

Considérons le réseau $G = (N,A)$ représentant la configuration urbaine initiale. N est l'ensemble des sommets du réseau, un sommet représentant soit un lieu (quartier) soit un carrefour du réseau de transport urbain; A représente l'ensemble des arcs du réseau de transport. Construisons le réseau G^* à partir de $G = (N,A)$ comme suit:

(i) construction aux sources

- pour tout s dans S, construisons un sommet $\bar{s}$ et un arc $(s,\bar{s})$; appelons $\bar{S}$ l'ensemble des sommets ainsi formés. On peut considérer $\bar{S}$ comme un dédoublement de S, ainsi si on appelle S_k, le sous-ensemble de S formé des lieux potentiels pour les ménages de type k, il conviendra d'appeler $\bar{S}_k$ l'ensemble correspondant dans $\bar{S}$.
- pour tout k dans K construisons un sommet et les arcs (k,S_k).

(ii) construction aux destinations

- pour tout k dans K, construisons un sommet k' et les arcs $(\mathcal{D}_k,k')$; appelons K' l'ensemble des sommets obtenus.

Définissons $N^* = \bar{K} \cup \bar{S} \cup S \cup N \cup K'$

$$A^* = \{(k,\bar{S}_k)\} \cup \{(s,\bar{s})\} \cup A \cup \{(\mathcal{D}_k,k')\}$$

et posons $G^* = (N^*,A^*)$.

(iii) coûts sur les arcs de G^*

- pour a dans A associons la fonction de coût $c_a(.)$ défini précédemment;
- aux arcs de $(K,\bar{S})$, $\{(s,\bar{s})\}$ associons les fonctions de coûts de rénovation et de localisation tels que précédemment définis

Pour la simplicité de l'écriture, nous noterons $c_a(.)$ la fonction de coût associée à l'arc a dans A*; les sommets K et K' seront assimilés à des centroïdes et les autres à des sommets intermédiaires dans une structure de flot de multicommodité dont les O-D sont les paires {k,k'}.

Considérons sur $G^* = (N^*,A^*)$ le problème de flot de multicommodité suivant:

Soit $\delta_{a,pk} = \begin{cases} 1 & \text{si a appartient au } p^{\text{ième}} \text{ chemin de k à k'} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$

h_{pk} : le flot de la $k^{\text{ième}}$ commodité sur le $p^{\text{ième}}$ chemin de k à k'

Considérons le programme:

$$\text{Min} \sum_{a\in A^*} \int_0^{v_a} c_a(x)dx \tag{47}$$

(P5) $$\text{s.a } f_k = \sum_p h_{pk}, \text{ pour tout k} \tag{48}$$

$$h_{pk} \geq 0, \text{ pour tout k; pour tout p} \tag{49}$$

où: $$v_a = \sum_k \sum_p \delta_{a,pk}\, h_{pk}$$

Par hypothèse $c_a(.)$ est monotone et strictement croissante, donc par le lemme 1, $\int_0^{v_a} c_a(x)dx$ est strictement convexe; par le lemme 2, $\sum_{a\in A^*} \int_0^{v_a} c_a(x)dx$ est strictement convexe. (P5) est réalisable (nous supposons G* convexe) et borné; il existe donc une solution unique.

Montrons que cette solution est une solution d'équilibre du problème initial; pour ce dérivons de la même façon que pour le problème (P3) les conditions d'optimalité suivantes:

Il existe $\underset{\sim}{h}$, $\underset{\sim}{\pi}$ tels que

$$\sum_a \delta_{a,pk}\, c_a\Big(\sum_\ell \sum_q \delta_{a,q\ell}\, h_{q\ell}\Big) - \pi_k \geq 0 \text{ , pour tout } k \tag{50}$$

$$h_{pk} > 0 \Rightarrow \sum_a \delta_{a,pk}\, c_a \Big(\sum_\ell \sum_q \delta_{a,q\ell}\, h_{q\ell}\Big) = \Pi_k, \text{ pour tout } k \tag{51}$$

$$\sum_a \delta_{a,pk}\, c_a \Big(\sum_\ell \sum_q \delta_{a,q\ell}\, h_{q\ell}\Big) > \pi_k \Rightarrow h_{pk} = 0, \text{ pour tout } k; \text{ pour tout } p \tag{52}$$

$$f_k = \sum_p h_{pk}, \text{ pour tout } k \tag{53}$$

$$\pi_k \geq 0, \text{ pour tout } k \tag{54}$$

$$h_{pk} \geq 0, \text{ pour tout } k; \text{ pour tout } p \tag{55}$$

Ces conditions suffisantes sont aussi nécessaires puisque l'optimum de (P5) est unique. D'après les définitions de $\delta_{a,pk}$, h_{pk} et $c_a(.)$, le terme $\sum_a \delta_{a,pk}\, c_a \Big(\sum_\ell \sum_q \delta_{a,q\ell}\, h_{q\ell}\Big)$ est le coût dans A* du $p^{\text{ième}}$ chemin de k à k'. Développons ce terme comme suit:

$$\sum_{a\in A^*} \delta_{a,pk}\, c_a \Big(\sum_\ell \sum_q \delta_{a,q\ell}\, h_{q\ell}\Big) = \sum_{a\in(\overline{k},S_k)} \delta_{a,pk}\, c_a \Big(\sum_\ell \sum_q \delta_{a,q\ell}\, h_{q\ell}\Big)$$

$$+ \sum_{a\in\{s,s'\}} \delta_{a,qk}\, c_a\Big(\sum_\ell \sum_q \delta_{a,q\ell}\, h_{q\ell}\Big) + \sum_{a\in A} \delta_{a,qk}\, c_a\Big(\sum_\ell \sum_q \delta_{a,q\ell}\, h_{q\ell}\Big)$$

$$+ \sum_{a\in(\mathcal{D}_k,k')} \delta_{a,qk}\, c_a\Big(\sum_\ell \sum_q \delta_{a,q\ell}\, h_{q\ell}\Big) \tag{56}$$

D'après la définition de $\overline{c_a(.)}$, la dernière somme du membre droit de cette égalité est nulle. Par construction, les ensembles (k,S_k) et $\{(\bar{s},s)\}$ sont des coupes par rapport au couple source-destination (k,k'), de plus les arcs de (k,S_k) et $\{(\bar{s},s)\}$ sont orientés de k vers S_k et $\bar{s}$ vers s respectivement ce qui implique que le $p^{ième}$ chemin de k à k' possède un seul arc dans (k,S_k), soit a_1, et un seul arc dans $\{(\bar{s},s)\}$, soit a_2. Par construction également il n'y a pas de chemin de k_1 à k_2 pour tout k_1,k_2 dans K, et ceci permet d'écrire le premier et le deuxième termes du membre droit de l'égalité comme suit:

$$\sum_{a\in(k,S_k)} \delta_{a,pk}\, c_a\Big(\sum_{\ell}\sum_{q} \delta_{a,q\ell}\, h_{q\ell}\Big) = c_{a_1}\,(h_{qk}) \tag{57}$$

$$\sum_{a\in\{(\bar{s},s)\}} \delta_{a,qk}\, c_a\Big(\sum_{\ell}\sum_{q} \delta_{a,q\ell} h_{q\ell}\Big) = c_{a_2}\,\Big(\sum_{\ell}\sum_{q} \delta_{a_2,q\ell}\, h_{q\ell}\Big) \tag{58}$$

On a alors:

$$\sum_{a\in A^*} \delta_{a,pk}\, c_a\Big(\sum_{\ell}\sum_{q} \delta_{a,q\ell}\, h_{q\ell}\Big) = c_{a_1}\,(h_{qk}) + c_{a_2}\,\Big(\sum_{\ell}\sum_{q} \delta_{a_2,q\ell}\, h_{q\ell}\Big) + \sum_{a\in A} \delta_{a,qk}\, c_a\Big(\sum_{\ell}\sum_{q} \delta_{a,q\ell}\, h_{q\ell}\Big) \tag{59}$$

Cette somme représente la désutilité totale du ménage du groupe k localisé en s (défini par $a_2 = (\bar{s},s)$ et voyageant par la trace sur G du $p^{ième}$ chemin de k à k'. Les premier, deuxième et troisième termes du membre droit sont respectivement les coûts de rénovation, de localisation et de transport pour le ménage du groupe k.

La condition d'optimalité (50) dit qu'aucun ménage du groupe k ne peut payer moins que π_k; l'idéal pour chaque ménage serait donc de payer

exactement π_k et pas plus.

La condition (51) dit que chaque ménage du groupe k paie exactement π_k; dans cette condition aucun ménage du groupe k ne serait désireux de changer de localisation, étant donné (50).

La condition (52) dit que si le coût pour les ménages du groupe k pour se localiser en s (défini par $a_2 = (\bar{s},s)$ est supérieur à π_k, aucun ménage de ce groupe ne se localiserait en s; cette condition montre donc que les propriétaires ont le maximum de gain possible; aucun propriétaire ne serait donc désireux de changer de locataire.

Les conditions (50) —(51) constituent donc la condition d'équilibre:

(E_2') : aucun ménage ne peut améliorer son choix en changeant de lieu de localisation et aucun propriétaire ne peut améliorer son gain en changeant de locataire.

La condition d'optimalité (53) dit que tous les ménages sont localisés, ce qui est identique à la condition d'équilibre:

(E_1') : tous les ménages sont localisés.

Enfin la condition (54) dit que les prix (désutilités) sont non négatifs.

La solution de (P5) est donc une localisation d'équilibre et comme (P5) est convexe, cette solution est unique. Q.E.D.

Recherche pratique de cette solution d'équilibre

Sous les hypothèses de coût de localisation concave strictement croissante et de coût de circulation convexe la fonction (47) est convexe; les contraintes (48) et (49) sont linéaires; Leblanc [18] et Nguyen [30] ont proposé une adaptation d'un algorithme de Frank et Wolfe [11] pour la recherche de la solution de problème de flot de multicommodité à coûts convexes. Dans ce qui suit nous allons présenter cet algorithme; la description formelle de l'algorithme de Frank et Wolfe est présentée en appendice.

Algorithme

Etape 1 Pour tout k, calculer le chemin le plus court de (k) à (k') et affecter f_k sur ce chemin; soit $\underline{\bar{h}}'$ le flot obtenu; $n \leftarrow 1$. Choisir une tolérance ε.

Etape 2 Résoudre le problème

$$\text{Min} \sum_a \sum_k \sum_q \delta_{a,pk}\, c_a\Big(\sum_k \sum_p \delta_{a,pk}\, \bar{h}^n_{pk}\Big)\, h_{pk} \tag{60}$$

$$\text{s.a. } f_k = \sum_p h_{pk}, \text{ pour tout } k \tag{61}$$

$$h_{pk} \geq 0, \text{ pour tout } k; \text{ pour tout } p \tag{62}$$

soit $\underline{h}^{*n}$ le flot obtenu.

$$\text{Si } \Big| \sum_a \sum_k \sum_p \delta_{a,pk}\, c_a\Big(\sum_k \sum_p \delta_{a,pk}\, \bar{h}^n_{pk}\Big)\, (h^{*n}_{pk} - \bar{h}^n_{pk}) \Big| < \varepsilon \tag{63}$$

alors arrêter; sinon aller à l'étape 3.

Etape 3 Résoudre le problème

$$\underset{0\le\lambda^n\le 1}{\text{Min}} \quad \sum_a \int_0^{h_a^{\lambda^n}} c(x)\,dx \tag{64}$$

où $h_a^{\lambda^n} = \sum_p \sum_k \delta_{a,pk} \left(\bar{h}_{pk}^n + \lambda^n \left(h_{pk}^{*n} - \bar{h}_{pk}^n\right)\right)$

Soit $\bar{\lambda}^n$ la solution de ce problème.

faire $\bar{h}_{pk}^n \leftarrow \bar{h}_{pk}^n + \bar{\lambda}^n \left(h_{pk}^{*n} - \bar{h}_{pk}^n\right)$, $n \leftarrow n + 1$, aller à l'étape 2.

Exemple

Nous présentons dans ce paragraphe un exemple simple de configuration urbaine à laquelle l'algorithme décrit a été appliqué. Nous présenterons au chapitre cinquième un exemple de grande taille et alors discuterons des problèmes d'encombrement de mémoire d'ordinateur. Les détails sur la façon de présenter les données au programme, ou plus généralement sur la façon de se servir de ce programme ne seront pas exposés ici, ceci faisant partie de la documentation de ce programme disponible.

La figure 1 représente la configuration urbaine. Il y a deux groupes de ménages. Les nombres au milieu des ronds sont les numéros de lieux ou de sommets du réseau de transport. Les nombres attachés aux lieux sont les types de ménages que ces lieux peuvent accueillir. Les lieux de localisation potentiels pour les ménages sons s_1, s_2 et s_3 pour le groupe 1 et s_1, s_2 et s_4 pour le groupe 2. Les lieux de service sont les sommets s_5 et s_6 pour le groupe 1 et les sommets s_3 et s_6 pour le groupe 2.

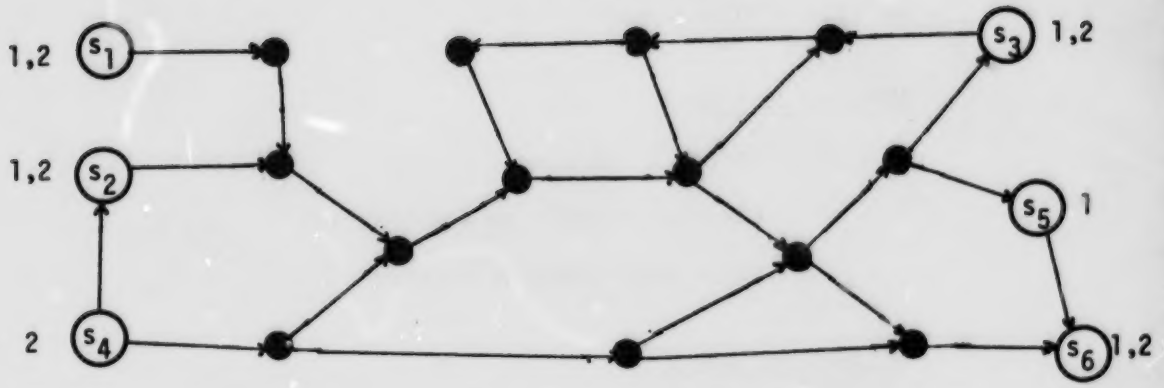


Figure 1: Configuration urbaine hypothétique

Le coût de localisation d'une quantité h_s de ménages en un lieu s de capacité A_s est de la forme:

$$c_s(h_s) = A_s^{\alpha} h_s^{\beta}$$

On a $\beta > 0$, $\alpha < 1$, ce qui implique que $c_s(.)$ est une fonction concave strictement croissante; le coefficient α est choisi strictement négatif (pour l'exemple en question $\alpha = -0.30$ et $\beta = 0.95$)

Le coût de transport d'une quantité v_a de personnes sur un arc a, de longueur ℓ, du réseau de transport est de la forme:

$$c_a(v_a) = \gamma \ell^{\lambda v_a}$$

Les coefficients γ et λ sont choisis égaux à 0.005 et les longueurs, elles, sont choisies arbitrairement; $c_a(.)$ est une fonction convexe strictement croissante.

Le tableau suivant donne les localisations obtenues par le programme (par l'algorithme).

Ménages de type 1

Nombre de ménages : 5000

Lieux potentiels de localisation : s_1, s_2, s_3

Lieux potentiels de service : s_5, s_6

Ménages de type 2

Nombre de ménages : 10000

Lieux potentiels de localisation : s_1, s_2, s_4

Lieux potentiels de service : s_3, s_6

Localisations obtenues

groupes \ lieux	1	2	2	4	total
1	0	1903	3096	0	4999
2	271	3806	0	5922	9999
total	271	5709	3096	5922	

L'algorithme de génération des chemins les plus courts et d'affectation de flot a été arrêté après 20 itérations. L'écart entre le nombre total de ménages du groupe 1 à localiser soit 5000 et le nombre effectivement localisé, soit 4999 ainsi que l'écart entre les 10000 ménages du groupe 2 à localiser et le nombre effectivement localisé, soit 9999, s'explique par le fait que les solutions, réelles, sont arrondies à des nombres entiers.

Dans cette section nous avons supposé qu'un individu du groupe k allant d'un lieu s de S_k vers une destination d de $\mathcal{D}$ était indifférent de d et, pourvu que d soit dans $\mathcal{D}_k$. Ceci limite le modèle au problèmes ou les capacités aux lieux d'accueil sont infiniment extensibles (par exemple le problème de localisation d'un commerce).

Pour le problème de choix du lieu de localisation par les ménages dans un contexte urbain, si l'on considère le facteur lieu de travail comme dominant, il est clair qu'il faut tenir compte du fait que beaucoup de lieux de travail ne sont pas à capacité d'accueil infiniment extensible; nous allons tenir compte de ceci en incorporant au modèle précédent une caractérisation du marché de travail.

1.4 Prise en charge des capacités des lieux d'emplois

Dans la section précédente, nous avons montré que sous certaines conditions on peut obtenir une localisation d'équilibre dans un contexte urbain. Le développement s'est basé sur les hypothèses suivantes:

- chaque ménage est assimilé à un individu, en ce qui regarde les déplacements engendrés par ce ménage
- chaque déplacement utilise un véhicule et le coefficient de remplissage est un
- il n'y a pas de capacité aux lieux de service vers lesquels se déplacent les ménages
- le nombre de ménages de chaque groupe est parfaitement connu (il n'y a pas de phénomène aléatoire).

Dans cette section, nous allons étendre le modèle précédent au cas où l'on connaît les capacités d'emploi aux lieux vers lesquels se dirigent les individus à partir de leur domicile. Nous n'aborderons pas ici le cas où le nombre de personnes d'un groupe donné de ménages se dirigeant vers un lieu donné est lié au nombre de ménages d'un autre groupe, se dirigeant vers ce lieu ou tout autre lieu. Les relations entre divers groupes, au niveau du marché de l'emploi sont uniquement celles de la capacité. Comme pour le modèle précédent, nous faisons l'hypothèse qui assimile un ménage à un individu unique se déplaçant en auto entre son domicile et son lieu de travail. Comme pour le modèle précédent, nous allons construire une extension G^* du graphe représentant la configuration urbaine et nous allons ramener le problème à celui du flot à coût convexe sur G^*.

Dans la procédure de construction de G^* du chapitre précédent on remplace la construction aux destinations par:

(i) construction aux destinations

- pour tout d dans $\mathcal{D}$, construisons un sommet d'; soit $\mathcal{D}'$ l'ensemble des sommets ainsi formés; construisons l'ensemble des arcs (d,d')
- soit T l'ensemble des types d'emplois et T_k l'ensemble des types d'emplois potentiels pour les ménages du groupe k. T_k est formé des sous-ensembles d'emplois $T_k^1,\ldots,T_k^L$ et on connaît les proportions $\alpha_k^1,\ldots,\alpha_k^L$ de ménages de type k dont les emplois potentiels sont dans $T_k^1,\ldots,T_k^L$. Si f_k est le nombre de ménages

du groupe k alors $\alpha_k^{\ell} f_k$ est le nombre de ménages du groupe k dont les emplois potentiels sont T_k. Pour tout t dans T, construisons un sommet t et un sommet t'; soit T' l'ensemble des sommets t'; construisons l'ensemble des arcs (t,t').

- pour tout T_k^{ℓ}, construisons un sommet t_k^{ℓ}; soit $\overline{T}$ l'ensemble des sommets ainsi formé; pour tout t, tel que (t,t') dans (T_k^{ℓ},t'), construisons un arc (t',t_k^{ℓ}).
- pour tout (d,d') dans $(\mathcal{D}_k,d')$ construisons les arcs (d't) pour tout t dans T_k.

Définissons:

$$N^* = \overline{K} \cup \overline{S} \cup S \cup N \cup \mathcal{D}' \cup T \cup T' \cup \overline{T}$$

$$A^* = \{(k,\overline{S}_k)\} \cup \{(s,\overline{s})\} \cup A \cup \{(d,d')\} \cup \{(\mathcal{D}_k',T_k)\} \cup \{(t,t')\} \cup \{(t',t_{\ell}^k)\}$$

et posons $G^* = (N^*,A^*)$

(ii) coûts sur les arcs de G^*

Les coûts sur les arcs de $(k,\overline{S}_k)$, $\{(s,\overline{s})\}$ et A sont définis comme suit:

- pour a dans {(d,d')}, associons la capacité commune au lieu et s'il y a lieu.
- soit t dans T_k; pour a dans $(\mathcal{D}'_k,T_k)$, associons la capacité pour les emplois de type t au lieu défini par (d,d') = a s'il y a lieu.
- pour a dans {(t,t')}, associons la capacité totale d'emploi de type t, s'il y a lieu.

Forme des capacités:

La capacité pour un arc a est exprimée par des bornes sur le nombre de personnes parcourant a; on peut aussi l'exprimer par une fonction de pénalité de la forme $c_a(v_a) = \alpha/(1-e^{\beta(b_a-v_a)})$, où b_a est la capacité de a et v_a le nombre de personnes parcourant a. Cette dernière façon d'exprimer la capacité a ceci d'avantageux que la structure de flot du problème sur G^* est conservée, et est désavantageux parce que le théorême d'existence et d'unicité de la solution d'équilibre de la section précédente n'est plus valide.

Nous obtenons alors la formulation suivante pour le cas où les capacités aux lieux d'emplois sont exprimées par des fonctions de pénalité.

Soient

$$\delta_{a,pkk'} = \begin{cases} 1 & \text{si l'arc a appartient au } p^{\text{ième}} \text{ chemin de k à k', pour k' dans } \{t_k^\ell\} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

$h_{pkk'}$: le flot sur le $p^{\text{ième}}$ chemin de k à k' pour k' dans $\{t_k^\ell\}$

Le problème prend alors la forme:

$$\text{Min} \sum_{a\in A^*} \int_0^{v_a} c_a(x)dx \tag{65}$$

(P6) s.a. $$a_k^\ell f_k = \sum_p h_{pkk'} \quad \text{pour tout k, pour tout k'} \tag{66}$$

$$h_{pkk'} \geq 0 \quad \text{dans } \{t_k^\ell\}, \text{ pour tout } \ell \tag{67}$$

où $$v_a = \sum_k \sum_p \delta_{a,pkk'} h_{pkk'}$$

Ce problème, sous les mêmes hypothèses que (P5) est un programme convexe; la méthode de résolution est donc identique à celle présentée.

Nous avons remarqué ci-dessous que l'introduction de fonctions de pénalité pour caractériser les capacités détruit le concept de localisation d'équilibre tel que présenté; en effet les coûts deviennent arbitraires puisqu'on ne peut pas connaître a priori l'influence de ces fonctions de pénalité dans la solution de (P6). Pour caractériser l'influence des fonctions de pénalité nous introduisons la notion de ε-équilibre.

Appelons A_p l'ensemble des arcs introduits pour prendre en charge les capacités aux lieux d'emploi, disons d'un type ℓ quelconque.

Définition

Une solution $\underset{\sim}{h}$ est ε-équilibrée si $\max_{a \in A_p} | c_a(h_a) | < \varepsilon$

Conséquence

Plus ε est proche de zéro, plus la solution est bonne (proche de la solution d'équilibre théorique).

Si $\varepsilon = 0$, alors on a une solution d'équilibre et cette solution est unique.

Si $\varepsilon > 0$, il se peut qu'il existe $a^* \in A_p$ tel que h_{a^*} inférieur à la capacité de a^*; si on appelle Π_{a^*} le prix payé par le ménage passant par a^* et $\Pi_{\bar{a}}$ le prix payé par celui passant par l'arc où

$\max_{a \in A_p} | c_a(h_a) |$ est atteint on a alors $\Pi_{a^*} = \bar{\Pi}_a + \bar{c}_a(\bar{h}_a)$

avec $\bar{c}_a(\bar{h}_a) > 0$; ce qui implique l'inégalité

$$\Pi_{a^*} > \bar{\Pi}_a$$

Si les sommets origines des arcs de A_p sont tous dans $\mathcal{D}_k$ alors les ménages du groupe k ne paient pas un prix uniforme. Nous introduisons la définition suivante:

Un équilibre est équitable pour un groupe k si tous les membres de ce groupe paient le même prix. Si tout le monde peut trouver un emploi il existe toujours une solution d'équilibre, équitable ou non équitable, mais lorsque $\varepsilon > 0$, la solution de (P6) n'est ni une solution d'équilibre équitable ni une solution d'équilibre non équitable.

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons considéré le problème de prévision de la localisation dans un contexte urbain. Des modèles basés sur la théorie de flots sur les réseaux ont été construits et nous avons montré que sous des conditions peu exigeantes des fonctions de coût, il existe une localisation d'équilibre. L'algorithme de Frank et Wolfe pour la programmation convexe a été adapté à la recherche de cette solution. Nous avons fait une hypothèse simplificatrice qui consiste à assimiler un ménage à un seul membre dans le processus de génération de voyages entre les domiciles et les divers services urbains. Nous avons de plus supposé que le coefficient de remplissage des véhicules utilisés pour ces voyages est un. Dans le chapitre suivant nous allons généraliser la méthode en relaxant certaines des hypothèses de cette section.

CHAPITRE DEUXIEME

QUELQUES EXTENSIONS DU MODELE DE PREVISION

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présenterons: une extension du modèle précédent au cas où l'on tient compte de plus d'un type de déplacements(par exemple les déplacements domicile-travail et domicile-lieux de récréation) ou de plus d'un voyage de même type (par exemple deux déplacements domicile-travail vers des lieux de service différents) par ménage; une formulation du problème de prévision lorsqu'on connaît les distributions (aléatoires) du nombre des gens se déplaçant; un schéma d'utilisation des modèles développés dans la simulation de la localisation des ménages dans un contexte urbain.

2.2 Extension au cas des ménages divisibles

Jusqu'à présent nous avons supposé qu'un ménage n'engendrerait qu'un seul type de déplacement (notamment le déplacement domicile-travail) et que le coefficient de remplissage des véhicules utilisés dans les déplacements était un. Dans ce paragraphe nous supposerons que plusieurs types de déplacements (par exemple les déplacements domicile-travail et domicile-école) peuvent être engendrés à partir d'un même ménage et que le coefficient de remplissage des véhicules n'est pas nécessairement un. Dans ce paragraphe nous voulons essentiellement caractériser une localisation d'équilibre sous ces hypothèses. Nous commencerons par illustrer l'analyse par un exemple simplifié, mais possédant les caractéristiques

essentielles du phénomène que nous voulons modéliser.

Exemple

Nous allons présenter un exemple simplifié mais qui illustre bien les problèmes posés dans cette section. Les simplifications faites pour cet exemple sont les suivantes:

- On considère un seul type de ménages, deux lieux potentiels de localisation et deux lieux de travail vers lesquels se dirigent les individus à partir de leur domicile; les quatre lieux sont distincts.
- Le coût de transport d'un ménage entre son domicile et son lieu de travail ne dépend que du couple domicile-travail concerné (peut dépendre du nombre de déplacements entre ce domicile et ce lieu de travail); tous les chemins entre domicile et travail sont distincts.
- Parmi la population localisée en un lieu, juste une proportion β effectue le trajet domicile-travail.
- Chaque lieu de localisation engendre deux types de déplacements: un vers le premier lieu de travail et un autre vers le deuxième lieu de travail.
- Le nombre total de ménages du groupe, ainsi que les proportions de voyages vers l'un et l'autre des lieux de travail sont donnés.

L'exemple décrit est présenté par le schéma ci-dessous. Nous utiliserons une notation proche de celle utilisée dans le cas général.

Soient:

- f_k est le nombre total de ménages à localiser en s_1 et s_2; k indique le groupe (ici il n'y en a qu'un); ℓ_1 et ℓ_2 sont les lieux de travail vers lesquels se déplacent les individus.
- à l'arc a_1 est associé le coût de localisation en s_1
  " " a_2 " " " " " " " s_2
  " " a_3 " " " " " transport de s_1 vers ℓ_1
  " " a_4 " " " " " " " s_1 " ℓ_2
  " " a_5 " " " " " " " s_2 " ℓ_1
  " " a_6 " " " " " " " s_2 " ℓ_2

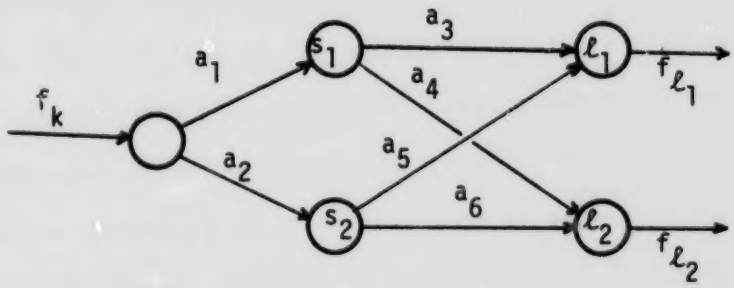


Schéma: Graphe G_k^* .

- Appelons $\alpha_k^{\ell_1}$ la proportion de voyages attirés par ℓ_1
  et $\alpha_k^{\ell_2}$ " " " " " " ℓ_2
  On a évidemment $\alpha_k^{\ell_1} + \alpha_k^{\ell_2} = 1$
- Appelons β_k la proportion d'individus localisés qui voyagent
- Appelons h_a le flot sur l'arc de G_k^* .

Les équations de "conservation" sur G_k^* sont:

$$h_{a_3} = \beta_k \alpha_k^{\ell_1} h_{a_1} \tag{68}$$

$$h_{a_4} = \beta_k \alpha_k^{\ell_2} h_{a_1} \tag{69}$$

$$h_{a_5} = \beta_k \alpha_k^{\ell_1} h_{a_2} \tag{70}$$

$$h_{a_6} = \beta_k \alpha_k^{\ell_2} h_{a_2} \tag{71}$$

$$f_k = h_{a_1} + h_{a_2} \tag{72}$$

Comme un ménage localisé en s engendre deux types de déplacements, la désutilité totale (coût) de ce ménage est le coût de localisation plus le coût des deux types de voyages. Si les ménages connaissent parfaitement le marché du logement, l'hypothèse de comportement rationnel veut qu'il y ait équilibre dans la localisation si et seulement si chaque ménage paye le même prix et ce prix est tel qu'aucun ménage ne choisit un lieu plus coûteux. Appelons π_k ce prix. Si on appelle $c_a(.)$ la fonction de coût sur l'arc a de G_k^* , tel que défini ci-dessus, alors ces conditions d'équilibre s'écrivent:

$$h_{a_1} > 0 \Rightarrow c_{a_1}(h_{a_1}) + c_{a_3}(\beta_k \alpha_k^{\ell_1} h_{a_1}) + c_{a_4}(\beta_k \alpha_k^{\ell_2} h_{a_1}) = \pi_k \tag{73}$$

$$c_{a_1}(h_{a_1}) + c_{a_3}(\beta_k \alpha_k^{\ell_1} h_{a_1}) + c_{a_4}(\beta_k \alpha_k^{\ell_2} h_{a_1}) > \pi_k \Rightarrow h_{a_1} = 0 \tag{74}$$

$$h_{a_2} > 0 \Rightarrow c_{a_2}(h_{a_2}) + c_{a_5}(\beta_k \alpha_k^{\ell_1} h_{a_2}) + c_{a_5}(\beta_k \alpha_k^{\ell_2} h_{a_2}) = \pi_k \tag{75}$$

$$c_{a_2}(h_{a_2}) + c_{a_5}(\beta_k \alpha_k^{\ell_1} h_{a_2}) + c_{a_5}(\beta_k \alpha_k^{\ell_2} h_{a_2}) > \pi_k \Rightarrow h_{a_2} = 0 \qquad (76)$$

Ces équations, avec les équations de "conservation" constituent les conditions d'existence d'une localisation d'équilibre. Nous allons maintenant étendre la caractérisation au cas où il y a K groupes de ménages, L lieux de services vers lesquels se dirigent les individus à partir de leur domicile et où les trajets domicile-travail se font sur un réseau de transport où il y a compétition entre divers voyageurs.

Cas général

Pour le modèle précédent, nous avons noté T_k l'ensemble des emplois potentiels pour le groupe k et remarqué que T_k est formé de sous-ensembles $T_k^1, \ldots, T_k^L$ où le sous-ensemble T_k^ℓ représente une spécialité (un type d'emploi) pour une portion α_k^ℓ du groupe k. Le réseau étendu G^* est identique à celui du problème (P6), cependant la formulation des conditions de conservation sur G^* ne sont pas identiques. Nous utiliserons le concept de chemin conditionné sur un réseau pour formuler ces conditions.

Soient:

$$\delta_{a,pk\ell s} = \begin{cases} 1 & \text{si a appartient au } p^{\text{ième}} \text{ chemin de k à } \ell \\ & \text{passant par s, pour } \ell \text{ dans } \{t_k^j\} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

$h_{pk\ell s}$: le flot sur le $p^{\text{ième}}$ chemin de k à ℓ passant par s

ψ_{ks} : le flot sur l'unique chemin de k à s

Dans la définition de $\delta_{a,pk\ell s}$, nous adopterons la convention que les indices sont choisis dans l'ordre k, s, ℓ, p; pour noter le fait qu'une fois k choisi les autres indices en dépendent, nous écrirons $\ell(k)$, $s(k)$; le chemin p dépend de k, ℓ et s et nous noterons ceci par $p(k,\ell,s)$.

Appelons

f_k : le nombre de ménages du groupe k

β_k : la proportion des individus du groupe k qui voyagent

α_k^{ℓ} : la proportion parmi les individus voyageant du groupe k qui vont vers ℓ.

On peut noter que $\beta_k\psi_{ks}$ est le nombre de ceux qui s'engagent sur le réseau (voyagent), à partir de s, pour le groupe k et $\alpha_k^{\ell}\beta_k\psi_{ks}$ est le nombre d'individus du groupe k qui s'engagent à partir de s vers le lieu de travail ℓ. Il est clair que $\sum_{\ell=1}^{L} \alpha_k^{\ell} = 1$, de sorte que

$$\sum_{\ell=1}^{L} \alpha_k^{\ell}\beta_k\psi_{ks} = \beta_k\psi_{ks}. \tag{77}$$

Les conditions de "conservation" sont:

$$f_k = \sum_s \psi_{ks}, \text{ pour tout k} \tag{78}$$

$$\beta_k\psi_{ks} = \sum_{\ell} \sum_{p(k,\ell,s)} h_{pk\ell s}, \text{ pour tout k, pour tout s} \tag{79}$$

$$\sum_{p(k,\ell,s)} h_{pk\ell s} = \alpha_k^{\ell} \sum_n \sum_{p(k,n.s)} h_{pkns}, \text{ pour tout } (k,\ell,s) \tag{80}$$

$$\psi_{ks} \geq 0, \text{ pour tout } (k,s) \tag{81}$$

$$h_{pk\ell s} \geq 0, \text{ pour tout } (p,k,\ell,s) \tag{82}$$

- L'équation (78) indique que tous les individus sont localisés.
- L'équation (79) indique la proportion totale des ménages qui se déplacent à partir du lieu s.
- L'équation (80) indique qu'à partir de chaque lieu de localisation s dans S_k, une proportion α_k^{ℓ} d'individus voyageant du groupe k, se déplacent vers le lieu de travail ℓ.

Soit un arc quelconque de G^*. Nous savons qu'il y a compétition sur le réseau G^* entre les individus effectuant les trajets domicile-lieu de travail. Le flot de voyageurs sur l'arc a est:

$$v_a = \sum_k \sum_{s(k)} \sum_{\ell(k)} \sum_{p(k,\ell s)} \delta_{a,pk\ell s} h_{pk\ell s}$$

pour a dans $A^* - \{(k,\bar{S}_k)\} \cup \{(s,\bar{s})\}$

et $v_a = \sum_s \psi_{ks}$ pour a défini par $a \equiv (s,\bar{s})$.

Appelons $c_a(h_a)$ le coût de localisation d'une quantité h_a d'individus par $a \equiv (s,\bar{s})$ et $c_a(h_a)$, $a \in A^* - \{(k,\bar{S}_k)\} \cup \{(s,\bar{s})\}$, le coût de transport sur l'arc a.

On suppose que tous les ménages connaissent parfaitement le marché du logement et se comportent de façon rationnelle. Chaque ménage cherche à minimiser sa désutilité totale, somme du coût de localisation et du coût de transport sur tous les chemins pris par des individus issus de ce ménage. Comme pour les modèles précédents, il y a équilibre si tous les ménages du même groupe ont la même désutilité. Ceci s'écrit:

$$\psi_{ks} > 0 \Rightarrow \sum_{\ell} \sum_{p} \sum_{a \in A^*} \delta_{a,pk\ell s}\, c_a(v_a) = \pi_k, \text{ pour tout } k \qquad (83)$$

$$\sum_{\ell} \sum_{p} \sum_{a \in A^*} \delta_{a,pk\ell s}\, c_a(v_a) > \pi_k \Rightarrow \psi_{ks} = 0 \text{ , pour tout } k; \text{ pour tout } s \qquad (84)$$

Ces conditions constituent, avec les équations de "conservation", les équations d'existence d'une solution d'équilibre. Il reste à mettre au point une méthode constructive de recherche d'une telle solution et une preuve d'unicité de telle solution. Nous nous sommes donné pour tâche, dans cette section, la caractérisation d'une solution d'équilibre.

2.3 Formulation stochastique

Jusqu'à présent, nous avons fait l'hypothèse que le nombre de ménages de chaque groupe ainsi que les divers coûts sont connus. Cet hypothèse suppose par exemple que l'on connaît le nombre moyen de ménages de chaque groupe ainsi que le coût moyen de chaque lieu de localisation; on peut cependant se placer dans la situation plus générale où ces entités sont inconnues mais de distributions aléatoires connues. Si on remplace ces distributions par leurs valeurs moyennes on sait que les solutions des formulations obtenues ne sont pas toujours satisfaisantes; une méthode plus fiable consiste à chercher la moyenne et la variance de chaque variable aléatoire et de résoudre une série de problèmes où les distributions sont remplacées par des valeurs à l'intérieur des intervalles de confiance. Nous pouvons cependant formuler le problème en tenant compte directement des distributions aléatoires.

Nous avons montré qu'une solution d'équilibre peut être obtenue en

résolvant le problème suivant:

$$\text{Min} \sum_{a \in A^*} \int_0^{v_a} c_a(x)dx \tag{85}$$

$$\text{s.a.} \quad f_k = \sum_p h_{pk} \text{ , pour tout } k \tag{86}$$

(P7)
$$h_{pk} \geq 0 \text{ , pour tout p, pour tout k} \tag{87}$$

où $v_a = \sum_k \sum_p \delta_{a,pk} \, h_{pk}$

Considérons maintenant f_k comme une valeur observée d'une distribution aléatoire connue F_k. Etant donné le caractère non unique de la valeur observée f_k, il nous apparaît de moindre importance d'exiger que l'égalité (86) soit respectée; il paraît plutôt naturel d'exiger qu'elle soit respectée avec une probabilité au moins égale à P_k. De plus si F_k est continue, il convient de remplacer (86) par l'inégalité $f_k \leq \sum_p h_{pk}$; étant donné que chaque unité de flot sur A* augmente le coût généralisé, dans une solution optimale, cette inégalité ne peut être stricte. Le problème prend donc la forme:

$$\text{Min} \sum_{a \in A^*} \int_0^{v_a} c_a(x)dx \tag{88}$$

(P8)
$$\text{s.a.} \quad P\left[\sum_p h_{pk} \geq f_k\right] \geq P_k \text{ , pour tout k} \tag{89}$$

$$h_{pk} \geq 0 \text{ , pour tout p; pour tout k} \tag{90}$$

où $$v_a = \sum_k \sum_p h_{pk}$$

Sous certaines hypothèses sur les distributions des F_k, on montre que cette formulation peut se ramener à un problème déterministe ([13.]).

Une telle généralisation n'est pas sans poser de problème; en effet, en plus des difficultés pratiques que l'on peut rencontrer en estimant les divers coûts utilisés dans les formulations, il y a le problème de l'estimation des distributions des F_k ainsi que celui de la conversion des contraintes de (P8) à des contraintes linéaires.

Il serait intéressant de voir comment on peut tenir compte autrement des phénomènes aléatoires inhérents aux problèmes urbains. Dans cet ordre d'idée, nous allons présenter sommairement une esquisse de méthodologie pour simuler le processus de croissance urbaine.

2.4 Utilisation des modèles développés pour la simulation de la croissance urbaine

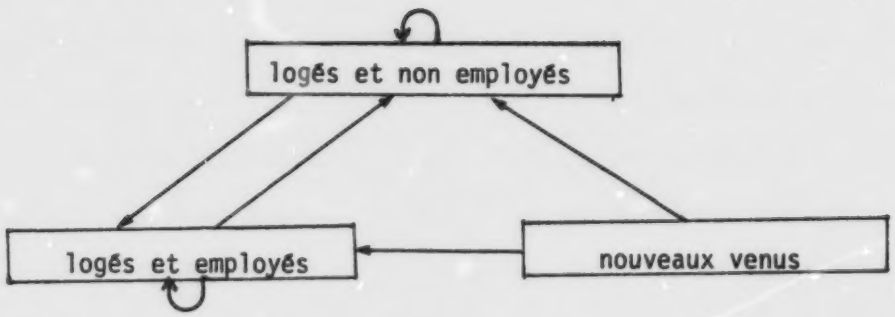
Nous avons jusqu'à présent fait l'hypothèse que chaque ménage connaît parfaitement le marché du logement et de l'emploi et fait une décision rationnelle quant aux choix de son logement et de son emploi; ceci nous a permis de montrer qu'une solution d'équilibre peut être obtenue en résolvant un problème de programmation convexe. Si l'on considère qu'à un instant quelconque le nombre de personnes sans emploi ou non logées est très faible par rapport au nombre de personnes à emploi et logements permanents, les modèles développés permettent de prévoir à moyen

terme la configuration urbaine formée par l'ensemble des logements et emplois permanents. Cette approche peut s'avérer pertinente dans un environnement urbain à faible croissance démographique et à faibles immigration et émigration. Dans certains cas, notamment ceux où la croissance démographique ou l'immigration est importante il convient de tenir compte du fait que les choix se font sans connaissance du marché du logement et de l'emploi. Une approche à cette situation consiste à estimer la distribution des choix et à affecter les quantités de ménages obtenues conformémemnt à ces distributions; on construit ainsi un modèle de simulation dans lequel les ménages avec connaissance du marché du logement et de l'emploi sont alloués optimalement et les autres suivent des distributions aléatoires. Dans la littérature sur la planification urbaine, l'étude la plus complète utilisant la simulation est le modèle NBER [16]; dans ce qui suit nous n'avons pas l'intention de construire un modèle de simulation, mais plutôt d'indiquer brièvement une façon de procéder. Nous indiquerons surtout comment les modèles développés peuvent être utilisés dans ce cadre.

Classification des états

L'ensemble de la population intéressée peut être classé en trois états: les ménages logés et employés, les ménages logés et non employés et les ménages à venir (immigrants). A chaque période une certaine quantité deménages se trouvant dans un état quelconque cherche une transition vers un autre état. Le diagramme suivant illustre les états et

les transitions possibles.



Les données sur les emplois, les logements, la croissance, l'immigration, l'émigration et les divers coûts sont des variables aléatoires notées $X_1(t)$, ..., $X_n(t)$ pour le temps t. $X_1(t)$ est naturellement une fonction de $X_1(t-T)$, ..., $X_n(t-T)$ où T est la période élémentaire de simulation; plus précisément, on réajuste les valeurs de $X_1(.),\ldots,X_n(.)$ à chaque période.

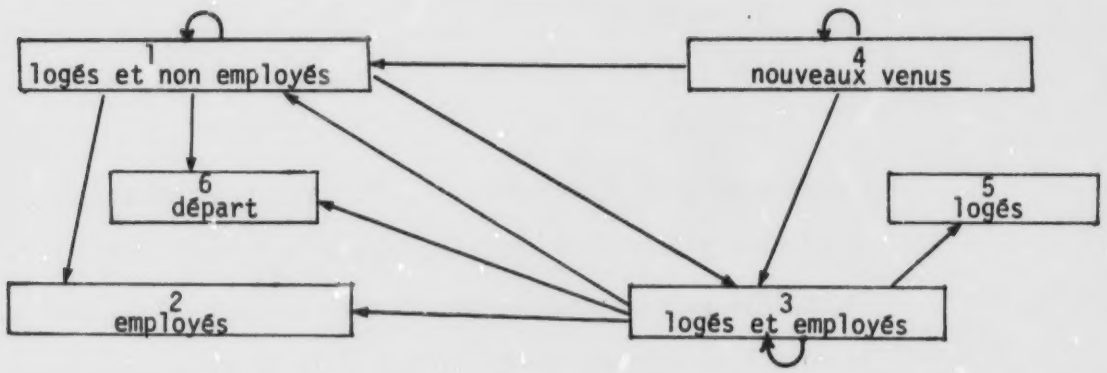
Hypothèses sur le comportement des ménages

Les hypothèses suivantes fixent une manière de conduire la simulation:

- les individus localisés depuis au moins une période choisissent optimalement leur lieu de relocalisation, s'il y a lieu;
- les individus employés depuis au moins une période choisissent optimalement leur nouveau lieu d'emploi, s'il y a lieu;
- les individus non localisés (nouveaux venus) choisissent suivant une distribution aléatoire connue;
- les individus qui ne sont pas employés choisissent leur emploi suivant

une distribution aléatoire connue.

Le diagramme suivant présente en détail les états et transitions:



Sur le diagramme, les flèches de 1 vers 2 et de 4 vers 1 et 3 correspondent aux choix avec information incomplète sur le système et les autres flèches correspondent aux choix optimaux. Les choix optimaux sont obtenus en utilisant les modèles développés; quant aux choix avec information incomplète, on observe les valeurs de transition à partir des distributions données et on les affecte. La simulation du processus peut correspondre à l'organigramme suivant:

Simulation du processus:

. Choix de la période de simulation T_s; $t \leftarrow 0$

. Choix de la période élémentaire T

Répéter:

- Générer $X_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$
- Générer les distributions de transition pour les choix avec information incomplète
- Affecter les ménages (choisissant optimalement) en utilisant

les modèles développés

- Affecter les ménages (choisissant avec information incomplète) en utilisant les distributions de transition avec information incomplète
- $t \leftarrow t + T$

jusqu'à $t = T_s$.

A chaque période élémentaire, l'affectation des ménages choisissant optimalement précède l'affectation des ménages avec choix à information incomplète puisque nous supposons que ceux qui connaissent parfaitement le marché du logement vont chercher à se localiser optimalement.

A chaque période élémentaire, la localisation obtenue est une localisation déséquilibrée, le déséquilibre venant des choix avec information incomplète, la localisation obtenue à la fin de la période de simulation est donc une localisation déséquilibrée.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons considéré plusieurs extensions du modèle de prévision construit au chapitre précédent. Nous avons pu caractériser la localisation d'équilibre dans le cas de ménages divisibles. Un paragraphe a été consacré à la formulation quand le nombre de ménages de chaque groupe est une variable aléatoire. Nous avons terminé en présentant une esquisse de formulation d'un modèle de simulation utilisant les modèles développés. Nous allons maintenant passer à l'étude des modèles de planification. La différence fondamentale entre le dé-

veloppement fait et les chapitres suivants est le fait que nous supposerons désormais qu'il existe une autorité centrale désirant contrôler le système dans le sens du moindre coût pour l'ensemble des usagers.

CHAPITRE TROISIEME

MODELE DE PLANIFICATION DU DEVELOPPEMENT DU SOL

3.1 Introduction

La grande complexité des phénomènes impliqués dans l'évolution du milieu urbain et régional rend difficile la construction de modèles tenant compte en même temps de macros et microstructures: on est souvent amené à construire un ensemble de modèles de phénomènes allant des plus agrégés aux plus désagrégés, les modèles agrégés servant de première approximation et d'intrant aux autres modèles. La littérature sur les modèles de planification urbaine et régionale traditionnellement traite séparément les problèmes de réseaux et ceux de développement du sol, mais récemment plusieurs auteurs ont proposé une approche intégrée; parmi ceux-ci Los [18] a présenté le développement simultané du sol et du réseau comme un problème de programmation mathématique en nombres entiers et mis au point un algorithme de type énumération implicite ainsi que des méthodes heuristiques pour sa résolution; Lundqvist [22] traite un problème mixte analogue. Son approche se caractérise par la prise en compte des effets dûs à l'interaction entre sites développés ainsi que des effets d'encombrement spatial des sites. Du point de vue du calcul, des problèmes pourraient se présenter, pour certains cas particuliers. C'est précisément à cause de cet aspect calcul que nous nous proposons d'envisager d'autres formulations avec possiblement des hypothèses restrictives. Commençons par caractériser brièvement les phénomènes que nous voulons étudier.

Nous entendrons par système urbain les divers quartiers de la ville avec leurs caractéristiques, les réseaux de transport reliant ces quartiers, les ménages voulant se localiser, les services publics et privés urbains et les relations entre ces entités. L'hypothèse fondamentale de ce chapitre est qu'il existe une autorité centrale, notamment l'administration urbaine, qui veut et peut, à l'aide de politiques de zonage, taxation et réglementations de trafic pour ne citer que celles-là, contrôler le développement du système dans le sens de l' "efficacité" et de la "désirabilité".

Dans son énoncé le plus simple, le problème de planification du développement du sol dans un système urbain est le suivant: on dispose d'un ensemble de sites (quartiers) où on veut localiser des ménages ou des services; la localisation d'un ménage ou d'un service entraîne un coût et on veut chercher la localisation la moins coûteuse pour tout le système. La plupart des problèmes qu'on rencontre dans l'étude de la planification du développement du sol urbain vient des interactions entre les diverses entités du système.

3.2 Interaction entre entités du système

Dans un système urbain, les entités ne sont pas indépendantes; il y a par exemple une relation évidente entre l'emplacement des quartiers résidentiels et la masse de gens d'une place de marché donnée; lorsqu'on veut en même temps développer un nouveau quartier résidentiel et augmenter la capacité d'accueil des hôpitaux, il est clair que le choix des

quartiers à développer peut influer sur le choix des hôpitaux dont les capacités doivent être augmentées. Les relations entre les diverses entités d'un système urbain étant très complexes, nous allons faire une série d'hypothèses, chaque hypothèse identifiant un phénomène particulier. Cette classification nous permettra entre autre d'identifier les problèmes traités ici et ceux qui ne le sont pas. Nous appellerons ressources ou activités les individus que l'on veut localiser ainsi que les services que l'on veut développer.

Hypothèse 1

L'interaction entre une activité de type k localisée en s et une activité de type k' localisée en s' ne se fait que par la nature compétitive des coûts de localisation en s et en s', $s' \neq s$. La fonction de coût de localisation d'une quantité h_{ks} de ressource de type k en s peut dépendre des $h_{k's,k'\neq k}$. On peut penser par exemple au problème d'acquisition de terrains pour la construction d'un bâtiment, le budget total (acquisition et construction) étant fixe et le coût d'accessibilité au bâtiment étant négligeable.

Hypothèse 2

Une activité localisée en un lieu donné interagit avec des activités allouées en ce lieu ainsi qu'avec les activités préexistantes à d'autres lieux par le moyen de génération et d'attraction de déplacements; un exemple est celui des résidences: on construit des blocs de logements; les locataires doivent se déplacer entre ces blocs et les divers lieux de ser-

vices dans la ville. On considère alors le coût de localisation et le coût de déplacement des ménages.

Hypothèse 3

Les activités localisées actuellement interagissent directement entre elles. C'est le cas où la fonction de coût de localisation en un lieu donné a pour argument entre autres, le niveau de l'activité d'un type quelconque localisée actuellement en d'autres lieux. On peut penser au problème de développement simultané de résidences et de capacité d'accueil des écoles: l'un des arguments de la fonction de coût d'extension des écoles est le niveau de développement des résidences (qui doivent générer des déplacements vers les écoles).

On pourra évidemment considérer des systèmes dont certaines entités interagissent suivant certaines des hypothèses et d'autres entités suivant d'autres hypothèses. Nous nous concentrerons cependant sur les systèmes vérifiant exclusivement une seule quelconque de ces hypothèses. La mise en évidence des trois types de relation n'est qu'une première étape vers la classification des systèmes. Il y a lieu de considérer les différences introduites au niveau de la modélisation ou du traitement, par les types, continues ou discrètes des variables ainsi que par la nature, linéaire, convexe, concave ou autre des fonctions de coût; les types de variables et la nature des fonctions de coût utilisées dans les modèles seront discutés à la présentation de ces modèles. Nous allons commencer par étudier le problème de localisation d'activités sous l'hypothèse 1.

3.3 Modèle de planification dans le cas où il n'y a pas d'interaction directe entre activités localisées (Hypothèse 1)

Soient:

$S = \{1,2,...S\}$ l'ensemble des lieux à développer

$K = \{1,2,...K\}$ l'ensemble des types d'activités à développer (localiser)

$c_{ks}(.)$, s dans S_k, la fonction de coût de développement de l'activité de type k au lieu de s; si h_{ks} est le niveau de développement de l'activité k au lieu s, alors $c_{ks}(h_{ks})$ est le coût correspondant

f_k la quantité totale d'activité de type k à développer (la quantité totale de ménages du groupe k à localiser).

On voudrait déterminer pour chaque type d'activités k le niveau de développement h_{ks} de telle sorte que le coût total de développement soit le plus petit possible.

Le problème de planification du développement d'activités lorsque le coût de développement d'une activité k en s ne dépend pas d'un autre type d'activités alloué en s s'écrit:

(P9)

$$\text{Min} \sum_{k=1}^{K} \sum_{s=1}^{S} c_{ks}(h_{ks}) \tag{91}$$

$$\text{s.a.} \sum_{s} h_{ks} = f_k \ , \ k=1,...,K \tag{92}$$

$$h_{ks} \geq 0 \ , \ k=1,...,K; \ s=1,...,S \tag{93}$$

Pour le cas où $c_{ks}(.)$ est linéaire, on a le problème de programmation linéaire. La seule difficulté posée par cette formulation est le cas où les coûts ont la propriété d'économie d'échelle ainsi que le cas où les activités sont de type discret; ces difficultés sont classiques et largement discutées dans la littérature.

Lorsque le coût de développement d'activité en un lieu s est partagé par tous les types d'activités développés en ce lieu, la formulation du problème de plan de développement le moins coûteux prend la forme:

$$\text{Min} \sum_{s=1}^{S} c_s(\sum_k h_{ks}) \tag{94}$$

(P10)
$$\text{s.a.} \sum_{s=1}^{S} h_{ks} = f_k \quad , \; k=1,\ldots,K \tag{95}$$

$$h_{ks} \geq 0 \quad , \; k=1,\ldots,K; \; s=1,\ldots,S \tag{96}$$

Dans le cas où $c_s(.)$ est linéaire, on a un problème de programmation linéaire; si $c_s(.)$ est convexe (exemple: densité de développement du lieu) on a un problème de programmation convexe (fonction objectif convexe et contraintes linéaires); dans ce cas l'algorithme de résolution est le même que celui présenté pour (P3).

Lorsque le développement d'une activité de type k en un lieu s entraîne un coût de développement indépendant des autres activités et un autre coût dépendant des autres activités développées en ce lieu, on a la formulation suivante:

(P11)

$$\text{Min} \sum_{k=1}^{K} \sum_{s=1}^{S} c_{ks}(h_{ks}) + \sum_{s=1}^{S} c_s\left(\sum_{k}^{K} h_{ks}\right) \tag{97}$$

$$\text{s.a.} \sum_{s=1}^{S} h_{ks} = f_k \ , \ k=1,\ldots,K \tag{98}$$

$$h_{ks} \geq 0 \ , \ k=1,\ldots,K; \ s=1,\ldots,S \tag{99}$$

Lorsque les fonctions de coût $c_{ks}(.)$ et $c_s(.)$ sont linéaires on a un problème de programmation linéaire type et il existe plusieurs algorithmes de résolution basés sur la méthode du simplexe [6]. Si les fonctions de coûts ne sont pas linéaires, alors se posent un certain nombre de difficultés connues en programmation non-linéaire; nous présentons au chapitre quatrième quelques discussions sur ces difficultés et en appendice, l'algorithme de Frank and Wolfe largement utilisé pour les problèmes de programmation mathématique à fonction objectif convexe et aux contraintes linéaires.

En laissant tomber l'hypothèse de non interaction des activités de ce paragraphe, on est en présence de phénomènes relativement beaucoup plus difficiles à étudier. L'une des manifestations les plus évidentes de l'interaction entre activités est la congestion de trafic causée par les déplacements qu'engendrent les activités localisées.

3.4 Modèle de planification dans le cas où il y a interaction entre activités localisées (Hypothèse 2)

Dans l'état actuel de l'art, c'est le modèle de Lundqvist qui trai-

te explicitement des critères d'encombrement spatial dans le problème de développement urbain. Nous allons présenter brièvement cette approche qui nous permettra d'introduire les points que nous voulons aborder.

Le modèle de Lundqvist a pour but de fournir un plan de développement du sol et du réseau de transport qui soit le moins coûteux en termes d'encombrement spatial et des effets négatifs de l'interaction entre activités localisées; il a la forme suivante:

$$\text{Min } \alpha \sum_{i=1}^{S} \sum_{j=1}^{S} h_i d_{ij}(\bar{t}) h_j / f^2 + \beta \sum_{i=1}^{S} \frac{h_i^2}{A_i} / f \qquad (100)$$

$$\text{s.a} \quad \alpha + \beta = 1 \qquad (101)$$

$$\sum_{i=1}^{S} h_i = f \qquad (102)$$

$$\sum_{i=1}^{S} \Delta h_i k_i^b + \sum_{j=1}^{M} \mu_j k_j^t \leq B \qquad (103)$$

(P12)

$$\sum_{i=1}^{S} \Delta h_i \omega_i^b + \sum_{j=1}^{M} \mu_j \omega_j^t \leq W \qquad (104)$$

$$h_i = h_i^o + \Delta h_i, \quad i=1,\ldots,S \qquad (105)$$

$$h_i \geq 0, \ \alpha,\beta \geq 0 \ , \quad i=1,\ldots,S \qquad (106)$$

$$\mu_j \in \{0,1\} \ , \quad j=1,\ldots,M \qquad (107)$$

où Δ_{h_i} est la quantité d'activités développées en i

h_i^o le niveau de l'activité en i

W, B le travail, le budget disponibles

$d_{ij}(\bar{t})$ la distance entre i et j dans le réseau $\bar{t}$

k_i^b le coût de développement d'une unité de surface de plancher en i

k_j^t le coût de construction de l'arc j du réseau

ω_i^b le travail demandé pour développer une unité de sol en i

ω_i^t le travail demandé pour construire l'arc j

A_i la surface totale constructible en i

Dans la fonction objectif le terme $\sum_{i=1}^{S} \sum_{j=1}^{S} h_i d_{ij}(\bar{t}) h_j / f^2$

modélise l'effet produit par une quantité h_i d'activités en i et h_j en j; c'est une sorte de "coût" d'interaction ou de contact entre activités localisées à des lieux différents. Le terme $\sum_{i=1}^{S} h_i^2 / A_i f$ modélise l'encombrement spatial. Une suite des coefficients α et β doit être fournie et les problèmes correspondants résolus afin de présenter plusieurs plans alternatifs.

Pour μ_j, j=1,..., M fixés, (P12) est un problème continu et la fonction objectif est une forme quadratique; appelons D la matrice définie par $d_{ij} = \alpha d_{ij}(\bar{t}) / f^2$ pour $i \neq j$ et $d_{ii} = \beta / A_i f$. (P12) prend alors la forme:

$$\text{Min } (H, DH') \tag{112}$$

$$\text{s.a. } \sum_{i=1}^{S} h_i = f \tag{113}$$

(P13)

$$\sum_{i=1}^{S} h_i k_i^b \leq \bar{B} \tag{114}$$

$$\sum_{i=1}^{S} h_i \omega_i^b \leq \bar{W} \tag{115}$$

$$h_i \geq h_i^o \ , \ i=1,\ldots,S \tag{116}$$

où $$\bar{B} = B - \sum_{d=1}^{M} \mu_j k_j^t$$

et $$\bar{W} = W - \sum_{d=1}^{M} \mu_j \omega_j^t$$

(P12) est un problème quadratique; si D n'est pas positive semi-définie alors rien ne garantit que (H,DH') est convexe (Zangwill [38]) or rien ne garantit que D est posivite semi-définie. La formulation (P12) peut donc dans certains cas poser des problèmes de calcul étant donné l'état des méthodes de recherche du minimum de fonctions non-convexes. Notons aussi que le produit $h_i h_j$ intervient dans la fonction objectif. Ceci voudrait dire par exemple qu'il devrait toujours avoir une grande attraction entre deux zones résidentielles fortement peuplées; en fait les déplacements se font surtout dans le sens domicile-travail ou domicile-centre-ville et pas toujours dans le sens domicile-domicile.

Ayant à l'idée que la méthode de résolution de (P12) est une méthode énumérative (par exemple: le Branch and bound) nous supposerons pour la suite μ_j, $j=1,\ldots,M$ fixés; ceci revient à concentrer notre attention sur les problèmes de programmation mathématique en continue que l'on ré-

soud à chaque étape de la méthode. Nous allons présenter une formulation mathématique représentant le plus possible de phénomènes pris en compte par le modèle de Lundqvist (effets d'encombrement spatial, effet d'attraction entre activités localisées, ...), mais pouvant être traitée de façon exacte et être utilisée pour des problèmes de grande taille.

Les activités à développer sont agrégées en K types (exemple: résidence, industrie, ...); toutes les activités substituables sont considérées comme du même type (la substitution de la demande doit être endogène au modèle); une quantité h_{sk} d'activités k allouées en s engendre une quantité $\alpha_k^{\ell} h_{ks}$ de déplacements vers le lieu ℓ, pour tout type de destination ℓ; les α_k^{ℓ} sont donc tout simplement les coefficients intersectoriels habituels. Pour différencier ce type d'activités des activités à origines fixes et interagissant avec une destination fixe, nous l'appellerons supercommodité. Nous nous limiterons aux supercommodités indépendantes (Hypothèse 2), le caractère agrégatif du modèle permettant cette restriction. Un exemple de problème de supercommodité est celui du développement des résidences: une proportion des déplacements engendrés va vers les usines, une autre vers les écoles, etc., et les déplacements ne sont ni identiques ni séparables aux origines. Nous commencerons par mettre en évidence la structure de problème flot à coût minimum sur un réseau, structure sous-jacente à problème.

Mise en évidence du problème de flot sous-jacent

Supposons que nous avons une quantité f d'activités de structure homogène à allouer à un ensemble discret de lieu $S = \{1,2,...S\}$. f engendre une quantité $\bar{f} = \alpha f$ de déplacements vers une destination d; le coût de localisation d'une quantité h_s de cette activité à s est $c_s(h_s)$; soit P_s l'ensemble des chemins de s à d, pour s dans S. Un chemin de s à d comprend un certain nombre d'arcs du réseau de transport et un arc quelconque du réseau de transport peut être utilisé par des déplacements venant de plusieurs lieux s différents. Si on définit

$$\delta_{a,ps} = \begin{cases} 1 & \text{si l'arc a appartient au } p^{\text{ième}} \text{ chemin de s à d} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

alors le problème du choix du meilleur plan de localisation peut se formuler comme suit:

$$\text{Min} \sum_s c_s(h_s) + \sum_s \sum_{P(s)} \delta_{a,ps}\, c_a\Big(\sum_s \sum_{P(s)} \delta_{a,ps} h_{ps}\Big) \qquad (115)$$

$$\text{s.a.} \quad f = \sum_s h_s \qquad (116)$$

(P14)
$$\alpha h_s = \sum_{P(s)} h_{ps} \text{ , pour tout s} \qquad (117)$$

$$h_s \geq 0,\ h_{ps} \geq 0, \text{ pour tout s, pour tout P(s) dans } P_s \qquad (118)$$

où la notation P(s) indique que le chemin p appartient à P_s, $c_a(h_a)$ est le coût total de transport de h_a sur l'arc a, et h_{ps} le flot sur le $p^{\text{ième}}$ chemin de s à d.

Eliminons h_s du problème en remplaçant dans (115) et (116) h_s par son expression de (117).

On a alors la formulation

$$\text{Min} \sum_s c_s(1/\alpha \sum_{P(s)} h_{ps}) + \sum_s \sum_{P(s)} \delta_{a,ps} c_a (\sum_s \sum_{P(s)} \delta_{a,ps} h_{ps}) \tag{119}$$

$$\text{s.a.} \quad \alpha f = \sum_s \sum_{P(s)} h_{ps} \tag{120}$$

$$h_{ps} \geq 0 \text{ , pour tout s, pour tout P(s) dans } P_s \tag{121}$$

Définissons $\bar{c}_s(h_{ps}) = c_s(\frac{1}{\alpha} h_{ps})$ et $\bar{f} = \alpha f$ et la formulation prend forme

$$\text{Min} \sum_s \bar{c}_s(\sum_{P(s)} h_{ps}) + \sum_s \sum_{P(s)} \delta_{a,ps} c_a (\sum_s \sum_{P(s)} \delta_{a,ps} h_{ps}) \tag{122}$$

$$\text{s.a.} \quad \bar{f} = \sum_s \sum_{P(s)} h_{ps} \tag{123}$$

$$h_{ps} \geq 0, \text{ pour tout s, pour tout p(s) dans } P_s \tag{124}$$

Ceci est un problème de flot à coût minimum sur un réseau (entre une source s reliée à chaque lieu s de S, et une destination d).

La méthode se généralise au problème de supercommodité; comme nous voulons aborder le problème par la structure de flot sous-jacente, il va falloir construire le réseau augmenté G* impliqué.

Construction du réseau augmenté

Les données initiales comportent entre autres les entités suivantes:

$N = \{1,2,\ldots,N\}$, ensemble des sommets du réseau représentant la configuration urbaine et comprenant entre autres les lieux à développer

$A = \{1,2,\ldots,A\}$, l'ensemble des arcs du réseau, comprenant éventuellement les projets à développer.

$K = \{1,2,\ldots,K\}$, l'ensemble de types d'activités à développer (à localiser).

$S = \{1,2,\ldots,S\}$, l'ensemble des lieux à développer; on a S dans N.

$\mathcal{D} = \{1,2,\ldots,D\}$, l'ensemble des destinations des déplacements engendrés à partir des lieux développés, on a $\mathcal{D}$ dans N.

$L = \{1,2,\ldots,L\}$, l'ensemble des types de destinations; rappelons que le problème que nous traitons est caractérisé entre autres par une source et plusieurs destinations

Construisons le graphe $G^* = (N^*, A^*)$ à partir de $G = (N, A)$ comme suit:

(i) construction aux sources

- pour tout s dans S construisons un sommet $\bar{s}$ et un arc $(s,\bar{s})$; soient S_k, $k = 1, \ldots, K$, l'ensemble des sources potentielles pour l'activité de type k; on a évidemment S_k dans S. On peut considérer les sommets $\bar{s}$ comme un dédoublement des sommets s; il convient alors d'appeler $\bar{S}$ l'ensemble de ces sommets obtenus par dédoublement et $\bar{S}_k$ le sous-ensemble de $\bar{S}$ classé par la relation "$\bar{s}$ dans $\bar{S}_k$ et si et seulement si s dans S_k". Nous voulons ramener le problème de planification à un problème de flot sur

un réseau, d'où l'intérêt de cette construction: nous verrons que faire circuler une quantité de flot h_s sur l'arc $(s,\bar{s})$ traduit sur le réseau augmenté le fait d'allouer une quantité de commodités h_s à s;

- pour tout k dans K , construisons un sommet (k); appelons l'ensemble des sommets obtenus K (en d'autres termes nous créons un sommet pour représenter chaque type d'activité). Construisons un arc $(k,\bar{s})$ pour chaque $\bar{s}$ dans $\bar{S}_k$ et notons l'ensemble des arcs obtenus $(k,\bar{S}_k)$.

(ii) construction aux destinations

- pour tout d dans $\mathcal{D}$, construisons un sommet $\bar{d}$ et l'arc $(d,\bar{d})$; soit $\bar{\mathcal{D}}$ l'ensemble des sommets ainsi formés; appelons $\mathcal{D}_k$ le sous-ensemble de $\mathcal{D}$, destinations potentielles des déplacements engendrés par les activités de type k. Identifions le sous-ensemble $\bar{\mathcal{D}}_k$ de $\bar{\mathcal{D}}$ par la relation "$\bar{d}$ dans $\bar{\mathcal{D}}_k$ si et seulement si d dans $\mathcal{D}_k$";

- pour tout ℓ dans L construisons un noeud (ℓ); soit L_k l'ensemble des types de destinations pour la ressource k; $\mathcal{D}_k^\ell$ l'ensemble des destinations de ce type pour le groupe k et $\bar{\mathcal{D}}_k^\ell$ définie par $\bar{d}$ dans $\bar{\mathcal{D}}_k^\ell$ si et seulement si d dans $\mathcal{D}_k^\ell$; pour tout $\bar{d}$ dans $\bar{\mathcal{D}}_k^\ell$ et ℓ dans L_k construisons un arc $(\bar{d},\ell)$ et notons $(\bar{\mathcal{D}}_k^\ell,L_k)$ l'ensemble des arcs obtenus.

Définissons

$$N^* = K \cup \bar{S} \cup S \cup N \cup \bar{D} \cup L \tag{125}$$

$$A^* = \{\cup_k (k,\bar{S}_k)\} \cup \{(s,\bar{s})\} \cup A \cup \{(d,\bar{d})\} \cup_k \{(\bar{D}_k^{\ell}, L_k)\} \tag{126}$$

et posons $G^* = (N^*, A^*)$.

Il conviendra au besoin pour la suite de considérer les éléments de N^* et A^* numérotés de 1 à N^* et de 1 à A^* respectivement.

Caractérisation des coûts

Le coût d'un flot h_a sur l'arc a sera noté $c_a(h_a)$

- pour un arc a de la forme $(s,\bar{s})$, $c_a(.)$ est la fonction de coût de congestion spatiale; étant donné que la densité est une fonction monotone strictement croissante du niveau d'activité, $c_a(.)$ est convexe. Lundqvist [22] d'ailleurs a proposé la fonction de coût $c_a(h_a) = h_a^2/A$ où A est la surface totale supportant les activités. Nous reviendrons par la suite au cas où $c_a(.)$ est un coût généralisé comportant une composante concave;

- pour un arc a de la forme $(d,\bar{d})$, $c_a(.)$ peut être soit la fonction de coût occasionné par la prise en charge aux destinations des déplacements attirés, soit une fonction de capacité (possiblement infini).

- pour a dans $\cup_k \{(k,S_k)\}$, $c_a(.)$ est la fonction de coût monétaire de localisation;

- pour a dans A, $c_a(.)$ est la fonction de coût total de transport sur l'arc.

Sur le réseau G^* dont les arcs sont munis des coûts ci-dessus, considérons le problème mathématique suivant:

Définitions:

Soient

$$\delta_{a,pk\ell s} = \begin{cases} 1 & \text{si l'arc a appartient au } p^{\text{ième}} \text{ chemin de k à } \ell \text{ passant par s} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

$h_{pk\ell s}$: le flot sur le $p^{\text{ième}}$ chemin de k à ℓ passant par s

$P(k,\ell,s)$: l'ensemble des chemins de k à ℓ passant par s

α_k^{ℓ} : la proportion de flot de type k allant à ℓ.

Dans les notations $\delta_{a,pk\ell s}$ et $h_{pk\ell s}$, l'ordre des indices correspond tout simplement à leur ordre d'occurence dans la définition. Les indices p, k, ℓ et s ne sont pas indépendants; en effet p est une fonction de k, ℓ et s en ce sens que l'origine, la destination et le point intermédiaire sont choisis avant l'évaluation des distances; nous caractériserons cette dépendance par la notation $p(k,\ell,s)$. La source s dans le quadruple (p,k,ℓ,s) est choisie dans S_k et ℓ dans L_k; nous tiendrons compte de ce fait par les notations $s(k)$ et $\ell(k)$.

Le problème de planification prend alors la forme:

$$\text{Min} \sum_{a \in A^*} c_a \left(\sum_k \sum_{\ell(k)} \sum_{s(k)} \sum_{p(k,\ell,s)} \delta_{a,pk\ell s} \, h_{pk\ell s} \right) \tag{127}$$

s.a.

$$f_k = \sum_{\ell(k)} \sum_{s(k)} \sum_{p(k,\ell,s)} h_{pk\ell s} \quad , \; k=1,\ldots,K \tag{128}$$

(P15)

$$\sum_{p(k,\ell,s)} h_{pk\ell s} = \alpha_k^{\ell} \sum_{\ell(k)} \sum_{p(k,\ell,s)} h_{pk\ell s}, \; s \in S_k \quad k=1,\ldots,K \tag{129}$$

$$h_{pk\ell s} \geq 0 \quad , \; s \in S_k, \; p \in P(k,\ell,s) \tag{130}$$

Sous les hypothèses de budget linéaire, de congestion spatiale et de coût de transport convexe, le problème (P15) est convexe. Nous présentons une adaptation de l'algorithme de Frank et Wolfe (voir Appendice) pour la résolution de ce problème.

Algorithme

Etape 1

Soit $\bar{h}$ un vecteur de flot tel que

$$f_k = \sum_{\ell(k)} \sum_{s(k)} \sum_{p(k,\ell,s)} h_{pk\ell s} \tag{131}$$

$$\sum_{p(k,\ell,s)} h_{pk\ell s} = \alpha_k^{\ell} \sum_{\ell(k)} \sum_{p(k,\ell,s)} h_{pk\ell s} \tag{132}$$

$$h_{pk\ell s} \geq 0 \tag{133}$$

$n \leftarrow 1$; choisir la tolérance ε.

Etape 2 (Recherche de direction de descente)

Résoudre le problème

$$\text{Min} \sum_{a\in A^*} \sum_{k} \sum_{\ell(h)} \sum_{s(k)} \sum_{p(k,\ell,s)} \delta_{a,pk\ell s}\, c_a \Big(\sum_{k} \sum_{\ell(k)} \sum_{s(k)} \sum_{p(k,\ell,s)} \delta_{a,pk\ell s}\, \bar{h}^n_{pk\ell s}\Big)\, h^n_{pk\ell s} \tag{134}$$

s.a.

$$f_k = \sum_{\ell(k)} \sum_{s(k)} \sum_{p(k,\ell,s)} h^n_{pk\ell s} \tag{135}$$

(P16)
$$\sum_{p(k,\ell,s)} h^n_{pk\ell s} = \alpha^{\ell}_{k} \sum_{\ell(k)} \sum_{p(k,\ell,s)} h^n_{pk\ell s} \tag{136}$$

$$h^n_{pk\ell s} \geq 0 \tag{137}$$

Soit $\underset{\sim}{h}^{*n}$ le flot obtenu.

$$\text{Si } \Big| \sum_{a} \sum_{k} \sum_{\ell(k)} \sum_{s(k)} \sum_{p(k,\ell,s)} \delta_{a,pk\ell s}\, c_a \Big(\sum_{k} \sum_{\ell(k)} \sum_{s(k)} \sum_{p(k,\ell,s)} \delta_{a,pk\ell s}\, \bar{h}^n_{pk\ell s}\Big)\, (h^{*n}_{pk\ell s} - \bar{h}^n_{pk\ell s}) \Big| < \varepsilon \tag{138}$$

alors arrêter, sinon aller à l'étape 3.

Etape 3 (Réaffectation de flot)

Résoudre le problème

$$\underset{0\leq\lambda^n\leq 1}{\text{Min}} \sum_{a} c_a \Big(\sum_{k} \sum_{\ell(k)} \sum_{s(k)} \sum_{p(k,\ell,s)} \delta_{a,pk\ell s}\, \bar{h}^n_{pk\ell s} + \lambda^n (h^{*n}_{pk\ell s} - \bar{h}^n_{pk\ell s})\Big) \tag{139}$$

Soit $\bar{\lambda}^n$ la valeur optimale

faire: $\bar{h}^n_{pk\ell s} \leftarrow \bar{h}^n_{pk\ell s} + \lambda^{-n} \ (h^{*n}_{pk\ell s} - \bar{h}^n_{pk\ell s})$; $n \leftarrow n + 1$ (140)

aller à 1.

La détermination de $\bar{h}'$ de l'étape 1 se fait de la façon suivante (pour simplifier, nous supposons qu'il n'y a qu'une seule supercommodité):

Procédure PR1

(i) Choisir s dans S.

(ii) Construire un arbre de racine (k) et dont la branche principale passe par (s).

(iii) Sur la partie de la branche entre (k) et (s) affecter f.

(iv) Sur la branche de (s) à ℓ affecter $\alpha^{\ell}_k f$

(v) Affecter un flot nul à toutes les branches hors de l'arbre.

Puisque $\sum_{\ell=1}^{L} \alpha^{\ell}_k = 1$, par (iii) et (iv) la contrainte (130) est satisfaite; actuellement un seul chemin de (k) à ℓ passant par s porte un flot non nul, ainsi la contrainte (136) a la forme

$$\bar{h}_{pk\ell s} = \alpha^{\ell}_k \sum_{\ell=1}^{L} h_{pk\ell s} = \alpha^{\ell}_k f \qquad (141)$$

Les contraintes de (P16) sont identiques aux contraintes (135) et (137). Une application de la procédure PR1 fournit un arbre; la résolution de (P16) est identique à la procédure PR1 où (v) est supprimée et (i) et (ii) remplacées par:

(i') Construire l'arbre des chemins les plus courts de racine (k) et

dont la branche principale passe par au moins un s dans S.

Sous les hypothèses de non interaction entre activités localisées, nous avons présenté une formulation et une méthode de résolution de cette formulation. L'extension de cette formulation au problème de développement simultané du sol et du réseau fournit un problème de programmation mixte, pour lequel on peut adopter une méthode de résolution énumérative.

Tout ce développement a été fait pour les supercommodités indépendantes. Nous allons aborder les commodités dépendantes par le truchement de l'allocation des supercommodités en quantité discrète.

3.5 Allocation en quantités discrètes

Dans ce paragraphe nous présenterons, sous les mêmes hypothèses que dans le paragraphe précédent, un modèle où certains lieux de localisation demandent un coût de lancement (coût fixe). C'est par exemple le cas de choix d'emplacement pour la construction d'un édifice public: on a un coût fixe d'acquisition de terrain et un coût de construction fonction de la capacité de l'édifice.

A chaque lieu potentiel de localisation s, associons une variable u_s ($u_s = 0$ ou 1); supposons, pour simplifier la notation que nous ayons un seul type d'activité à développer (ceci revient à ignorer l'indice k de la formulation précédente). La fonction de coût associée à un arc de type a de type $(s,\bar{s})$ est de la forme:

$$c_a(h_a) = \begin{cases} 0 & \text{si } h_a = 0 \\ c_a^0 + \bar{c}_a(h_a) & \text{si } h_a > 0 \end{cases}$$

Le problème peut prendre la forme:

$$\text{Min} \sum_{a \in A^*} c_a \left(\sum_{\ell} \sum_{s} \sum_{p(\ell,s)} \delta_{a,p\ell s}\, h_{p\ell s} \right) \tag{142}$$

$$\text{s.a.} \quad f = \sum_{\ell} \sum_{s} \sum_{p(\ell,s)} h_{p\ell s} \tag{143}$$

$$\sum_{p(\ell,s)} h_{p\ell s} = \alpha^{\ell} u_s \sum_{\ell} \sum_{p(\ell,s)} h_{p\ell s} \tag{144}$$

(P17)

$$h_{p\ell s} \geq 0 \tag{145}$$

$$u_s \in \{0,1\} \tag{146}$$

$$\sum_{s=1}^{S} u_s = 1 \tag{147}$$

Projetant sur $U = \{u_s \mid \sum_{s=1}^{S} u_s = 1,\ u_s \in \{0,1\}$ on a le problème

$$\text{Min}_{u \in U} \left\{ \min \sum_{a \in A^*} c_a \left(\sum_{\ell} \sum_{s} \sum_{p(\ell,s)} \delta_{a,p\ell s}\, h_{p\ell s} \right) \right. \tag{148}$$

$$\text{s.a.} \quad f = \sum_{\ell} \sum_{s} \sum_{p(\ell,s)} h_{p\ell s} \tag{149}$$

(P18)

$$\sum_{p(\ell,s)} h_{p\ell s} = \alpha^{\ell} u_s \sum_{\ell} \sum_{p(\ell,s)} h_{p\ell s} \tag{150}$$

$$\left. h_{p\ell s} \geq 0 \right\} \tag{151}$$

Le problème entre crochets est un problème de flot d'une supercommodité à origine fixe. Le problème équivalent pour K supercommodités se formule de la même façon (on projette le problème sur l'espace des variables de contrôles $U^K = U_1 \times U_2 \ldots \times U_K$). Nous sommes en mesure de for-

muler maintenant le problème d'allocation en quantité discrète de supercommodités dépendantes (Hypothèse 3).

3.6 Allocation de supercommodités (en quantités discrètes)

Nous dirons que la supercommodité k_i est attirée par la supercommodité k_j si l'allocation d'une quantité non nulle de la supercommodité k_j en s entraîne un flot non nul de la supercommodité k_i du lieu où elle est allouée, vers s. Le réseau G* sera complété comme suit:

si k_i est attiré par k_j, créons un noeud $\ell_{k_j}^{k_i}$ et les liens $(s,\ell_{k_j}^{k_i})$ $s \in S_{k_j}$. Les opérations correspondantes sont alors:

$$N^* \leftarrow N^* \cup \{(\ell_{k_j}^{k_i})\}$$

$$A^* \leftarrow A^* \cup \underset{s\in S_{k_j}}{} \{(s,\ell_{k_j}^{k_i})\}$$

$$L_{k_i} \leftarrow L_{k_i} \cup \{\ell_{k_j}^{k_i}\}$$

De plus les arcs $(k_j,\bar{s})$ et $(s,\ell_{k_j}^{k_i})$ sont munis de variables booléennes de contrôle u_s. Nous sommes maintenant en mesure de formuler le problème d'allocation de supercommodité en quantités discrètes (hypothèse 3); adoptant la même notation que précédemment nous avons:

$$\text{Min} \sum_{a\in A^*} c_a \left(\sum_k \sum_{\ell(k)} \sum_{s(k)} \sum_{p(k,\ell,s)} \delta_{a,pk\ell s}\, h_{pk\ell s}\right) \qquad (152)$$

$$\text{s.a. } f_k = \sum_{\ell(k)} \sum_{s(k)} \sum_{p(k,\ell,s)} k_{pk\ell s} \tag{153}$$

$$\sum_{p(k,\ell,s)} h_{pk\ell s} = \alpha_k^{\ell} \sum_{\ell(k)} \sum_{p(k,\ell,s)} h_{pk\ell s} \tag{154}$$

(P18)

$$\sum_{p(k,\ell,s)} h_{pk\ell s} = \alpha_k^{\ell} u_{s(k)} \sum_{\ell(k)} \sum_{p(k,\ell,s)} h_{pk\ell s} \tag{155}$$

$$\sum_{s(k)} u_{s(k)} = 1 \tag{156}$$

$$u_{s(k)} \in \{0,1\} \quad , \; h_{pk\ell s} \geq 0 \tag{157}$$

Ce problème, comme les précédents peut être projeté sur l'espace des variables booléennes; on peut alors mettre au point une méthode énumérative. Ceci ne peut donc être efficace que si le nombre de lieux de localisation est petit.

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons considéré le problème de planification de la localisation des activités dans un contexte urbain. Des modèles ont été présentés pour représenter diverses classes de problèmes. Chaque classe de problèmes repose sur des hypothèses restrictives mais suffisamment réalistes pour caractériser des phénomènes urbains réels. L'hypothèse implicite la plus forte dans ce chapitre est la convexité des fonctions de coût. Cette hypothèse n'est pas vérifiée pour une vas-

te classe de problèmes caractérisés par les économies d'échelle. Nous présenterons dans le chapitre suivant les difficultés que l'on rencontre pour résoudre ce genre de problème. Nous discuterons aussi des problèmes posés par l'algorithme de résolution du problème principal de ce chapitre.

CHAPITRE QUATRIEME

ASPECTS ALGORITHMIQUES DES METHODES PRESENTEES

4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons présenter certains problèmes algorithmiques posés par les méthodes de résolution des problèmes de localisation tels que formulés. Dans la formulation du problème de planification urbaine et du problème de prévision de la croissance urbaine dans le cas où les ménages sont divisibles, nous avons utilisé le concept du chemin le plus court passant par un point donné; dans la formulation du problème de planification urbaine, nous avons fait l'hypothèse que le coût de localisation est linéaire(donc convexe). Dans ce qui suit nous commencerons par aborder le problème de calcul des chemins les plus courts lorsqu'on impose aux chemins de passer par certains points, puis nous traiterons des difficultés que l'on rencontre en formulant le problème de planification à coûts de localisation concaves.

4.2 Chemins les plus courts conditionnés

Le calcul des chemins les plus courts entre des sommets d'un graphe est l'un des problèmes auxquels on revient le plus souvent en recherche opérationnelle. Outre les problèmes centraux de calcul des chemins les plus courts entre un couple de points et entre tous les couples de points, la littérature aborde abondamment ceux du calcul des $k^{ième}$ plus courts chemins et de chemins les plus courts passant par un ensemble donné de sommets. Nous nous proposons ici de regarder le problème du calcul du

chemin le plus court passant par l'un au moins d'un ensemble de points donnés.

Nous avons remarqué en présentant l'algorithme de résolution du problème (P15) que choisir une direction de descente consiste à chercher l'arbre des chemins les plus courts passant par l'un au moins des lieux de l'ensemble des lieux de localisation potentiels, d'où l'importance pour ce travail de la présentation des méthodes de recherche d'un tel arbre. Cependant, le problème de l'arbre des chemins les plus courts passant par un point donné constitue en soi un sujet intéressant du point de vue des applications puisqu'il peut servir à modéliser des problèmes réels tels que celui du choix des concentrateurs pour un réseau de télécommunication ou la localisation des entités partageables comme les hôpitaux, les écoles, etc... Plusieurs auteurs ont présenté des algorithmes approximatifs pour résoudre certaines versions de ce problème; une revue unificatrice de ces algorithmes se trouve dans Chou et al. [4]; nous nous intéressons ici à un algorithme exact.

La difficulté principale du problème vient du fait suivant: si on veut trouver sur un graphe orienté un arbre des plus courts chemins T, de racine v_1, l'effort de calcul n'est pas diminué si on connaît d'avance un arbre des chemins les plus courts T_0 de racine v_0, v_0 différent de v_1. Pour avoir une idée de cette assertion, il suffit de construire un exemple où les deux arbres n'ont aucun arc en commun. Nous présentons deux approches consistant essentiellement en l'application dans un certain ordre des algorithmes de calcul des chemins les plus courts entre

tout couple de points (algorithme de Warshall) et de celui de calcul du chemin le plus court entre un couple de points (algorithme de Dijkstra).

Algorithmes

Soient $G = (N,A)$ un graphe orienté, S, N_1, et N_2 une partition de N. Supposons que (N_1,S) forme une coupe et que tous les arcs de (N_1,S) sont orientés de N_1 vers S. Nous voulons chercher l'arbre des chemins les plus courts de racine v (v dans N_1) et dont la branche principale passe exactement par un point de S. Nous entendons ici par l'arbre des chemins les plus courts un arbre dont la somme des coûts associés aux branches est la plus petite possible. Si T est un arbre quelconque dans G nous noterons v(T) la valeur de cet arbre (i.e. la somme des coûts associés aux branches).

Méthode 1

- Calcul des chemins les plus courts entre tout couple de points (Warshall).
- Soit v_0 un point donné de N_1 pour tout s dans S, calculer la valeur $v(T_s)$ de l'arbre de racine v_0 et passant par s.
- Choisir T_{s*} pour lequel $\min_s v(T_s)$ est atteint.

Méthode 2

1- Chercher l'arbre de racine v_0 et de sommets S.

2- Soit s_1 dans S; trouver l'arbre des chemins les plus courts de racine s_1 (Dijkstra).

3- Soit T_{s_1} l'arbre de racine v_0 et passant par s_1, et $v(T_{s_1})$ sa valeur.

4- Trouver pour $s_2 \neq s_1$, l'arbre T_{s_2}, de racine v_o et passant par s_2 .

5- Si $v(T_{s_1}) \leq v(T_{s_2})$, exclure s_2 de toute future considération, sinon exclure s_1 de toute future considération. Si tous les points de S sont considérés, l'arbre en main est celui cherché, sinon choisir le nouveau point s_1 ou s_2 dans S et aller en 4.

Choix d'une méthode parmi les deux

Si N est le nombre d'éléments de N et S le nombre d'éléments de S, la méthode 1 demande un effort de calcul d'environ N(N-1)(N-2) et la méthode 2 un effort d'environ $3SN^2$. La méthode 2 est donc avantageuse par rapport à la méthode 1 si on a $3SN^2 < N(N-1)(N-2)$, c'est-à-dire $S < N/3 - 1$.

La méthode 1 ne demande pas de structure d'information particulière additionnelle à celle nécessaire pour l'algorithme de Warshall. La méthode 2 demande pour chaque sommet du réseau deux champs supplémentaires, un champ pour étiqueter et un autre pour enregistrer les distances, étant donné que l'on doive disposer en même temps de deux structures d'arbres.

Nous allons aborder maintenant les problèmes posés par les économies d'échelle à la localisation (coûts concaves).

4.3 Problèmes posés par les économies d'échelle et les projets nouveaux

Nous avons fait à propos du modèle de planification la supposition que les projets à développer n'étaient pas neufs et que les niveaux de développement étaient assez limités pour qu'on ne puisse pas parler d'éco-

nomie d'échelle. Le modèle que nous avons présenté avait en conséquence des fonctions de coût de développement linéaire (donc convexe), ce qui a permis de traiter le problème dans le cadre général de la programmation convexe; dans le cas où le niveau de développement peut varier dans un large intervalle, il faut tenir compte des économies d'échelle, caractérisées essentiellement par des fonctions de coût concaves, strictement croissantes. On sait qu'une fonction concave sur un domaine convexe possède des minimums locaux possiblement à tous les points extrêmes du domaine; les techniques actuelles d'optimisation ne permettent donc en général que de trouver des minimums locaux. Pour contourner cette difficulté, une des techniques utilisées est celle d'approximation.

Pour le cas le plus simple, par exemple le problème (P9), supposons que l'on connaisse les bornes ($\bar{h}^1_{ks} \leq h_{ks} \leq \bar{h}^2_{ks}$) de h_{ks} pour tout k et pour tout s. On partitionne l'intervalle ($\bar{h}^1_{ks}$, $\bar{h}^2_{ks}$) en p-1 intervalles délimitées par h^1_{ks}, h^2_{ks}, ..., h^p_{ks}, tels que $\bar{h}^1_{ks} = h^1_{ks} < h^2_{ks} < \ldots < h^p_{ks} = \bar{h}^2_{ks}$ et le problème s'écrit

$$\text{Min} \sum_{k=1}^{K} \sum_{s=1}^{S} \sum_{r=1}^{P} \gamma^r_{ks} X^r_{ks} \tag{158}$$

$$\text{s.a.} \quad f_k = \sum_{s=1}^{S} \sum_{r=1}^{P} x^r_{ks} \tag{159}$$

(P19)

$$0 \leq X^r_{ks} \leq U^r_{ks} \,, \; X^r_{ks} \geq 0 \tag{160}$$

$$X^r_{ks} = 0 \quad \text{si} \quad X^{r-1}_{ks} < U^{r-1}_{ks} \tag{161}$$

où $U^r_{ks} = h^r_{ks} - h^{r-1}_{ks}$ et γ^r_{ks} est la pente de la droite approximant $C_{ks}(.)$ sur $[x^{r-1}_{ks} < U^{r-1}_{ks}]$.

La vraie difficulté vient du fait que la partition des intervalles $(\bar{h}^1_{ks}, \bar{h}^2_{ks})$ en p sous-intervalle augmente beaucoup la taille du problème si p est grand, tandis que lorsque p est petit on ne peut avoir des bonnes approximations pour les fonctions de coûts que lorsqu'elles sont de formes particulières. La prise en charge des coûts concaves par la méthode d'approximation ne peut être efficace que pour des problèmes particuliers (nombre faible de lieux de localisation et fonction de coût approximable par un faible nombre de segments). Dans le cas où certains lieux ont un niveau de développement nul, le problème qui se pose est celui du coût fixe.

Dans toute la présentation, nous avons supposé que les lieux à développer possédaient déjà une certaine quantité de ménages et le fait de considérer les quantités continues constituait une première approximation. Dans le cas où le lieu a un niveau de développement nul, le plus souvent la décision de le développer entraîne un coût de lancement (coût fixe) très élevé. Nous avons présenté des formulations pour la localisation en quantité discrète; pour tenir compte des coûts fixes dans cette approche, on considère des fonctions de coût de la forme

$$\tilde{c}_s(h_s) = \begin{cases} K_s + c_s(h_s) & \text{si } h_s > 0 \\ 0 & \text{si } h_s = 0 \end{cases}$$

Si M_s est la borne supérieure de h_s, on ajoute aux contraintes de (P15) les équations

$$h_s \leq M_s u_s$$
$$u_s = 0 \text{ ou } 1$$

et on remplace dans la fonction objectif du même problème $c_s(.)$ par $\tilde{c}_s(.)$.

Un cas non moins réaliste est celui où il existe des coûts fixes dont la partie continue est concave. Ici il faut faire appel aux deux techniques (partition d'intervalle, prise en charge des coûts fixes). Encore une fois cette approche ne peut être efficace que pour des problèmes très particuliers.

4.4 Conclusion

Nous avons présenté des difficultés posées par la modélisation des problèmes de localisation dans un contexte urbain. Certaines des difficultés présentées sont des problèmes classiques reconnus difficiles (coût concave), d'autres semblent autant difficiles (chemins les plus courts conditionnés). Il s'ensuit que l'efficacité des méthodes présentées pour contourner ces difficultés dépend des particularités des problèmes auxquels on fait face.

CHAPITRE CINQUIEME

EXEMPLE NUMERIQUE

5.1 Introduction

Nous présentons dans ce chapitre un exemple de taille réaliste. Les modèles d'équilibre de la localisation des ménages dans un contexte urbain existants étant inadéquats, l'utilisation de tels modèles dans des cas réels est inexistante, du moins sur la foi de la littérature sur la planification urbaine. Ce chapitre se veut donc être un appui important, mais non indispensable aux développements que nous avons faits; son but est de persuader tout éventuel utilisateur que les méthodes développées peuvent s'appliquer aux problèmes de taille réaliste. Nous n'aborderons pas ici les preuves formelles de convergence de ces méthodes, étant donné que l'algorithme de base , celui de Frank and Wolfe pour la programmation convexe est largement étudié (Wolfe [37]) et s'est prouvé efficace pour les problèmes de flots à coûts convexes sur les réseaux (Nguyen [30]). La non disponibilité des données réelles et les coûts que peuvent entraîner une collection de telles données nous ont amenés à choisir un exemple hypothétique. Le choix du modèle représenté par le problème (P5) vient du fait que les autres modèles présentés peuvent être considérés soit comme un cas particulier, soit comme une extension de celui-ci:

- le problème de localisation où l'on tient compte juste du coût de localisation peut être traité par le code développé en annulant les coûts de transport;

- Le problème de localisation avec capacité sur les lieux de service peut être traité par une application itérative du code développé; à chaque itération on calcule les capacités et localise un nombre de ménages égal au minimum des capacités; pour traiter ce problème par la méthode de fonctions de pénalité associée aux lieux de services, il faut cependant modifier une partie (routine NETWORK) du code.
- la résolution du problème de planification de la localisation se ramène à une série d'applications du code développé; cependant l'organisation des itérations demande une modification de l'agencement des routines principales du code et lorsque les coûts de localisation sont non-convexes, les solutions peuvent représenter des optimums locaux.

En résumé, des modifications mineures du code développé suffisent pour l'adapter à la plupart des modèles présentés. Pour une application des méthodes présentées à la planification urbaine, il serait souhaitable de les intégrer en un système éventuellement interactif. Dans ce qui suit nous allons présenter les divers paramètres ainsi que les résultats de l'exemple traité.

5.2 Paramètres de l'exemple et configuration urbaine

Les paramètres de l'exemple sont:

Nombre total des zones: 116

Nombre total des lieux de localisation : 83

Nombre de groupes de ménages: 3

Nombre de lieux de localisation potentiels pour le groupe 1: 44

Nombre de lieux de localisation potentiels pour le groupe 2: 35

Nombre de lieux de localisation potentiels pour le groupe 3: 23

Nombre de types de lieux de services (destinations): 3

Nombre de lieux de services pour le groupe 1: 15

Nombre de lieux de services pour le groupe 2: 10

Nombre de lieux de services pour le groupe 3: 8

Nombre total de sommets du réseau formant la configuration (initiale) urbaine: 223

Nombre total de sommets intermédiaires (carrefour): 107

Nombre total d'arcs du réseau principal reliant les zones: 337

Nombre de ménages du groupe 1: 32,000

Nombre de ménages du groupe 2: 25,000

Nombre de ménages du groupe 3: 15,000

Les tableaux qui suivent présentent la configuration urbaine.

Les ensembles S_1 et D_1, respectivement lieux de localisation potentiels et lieux de service pour les ménages du groupe 1 sont représentés sur cette figure.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1						12										
2			87	89	5	13										
3	84			1		14										98
4						15	19	23	28	32	36			96		
5				2	6			24	93					97		
6				3	7	91			94	95			39			
7				4	8	92		25	29	33			40	43	44	
8					9	16	20	26	30	34			41			
9	85				10	17	21	27	31	35	37	38	42			
10	86		88	90	11	18	22									

1 à 44: lieu de localisation

45 à 98: lieu de service

Les ensembles S_2 et D_2, respectivement lieux de localisation potentiels et lieux de service pour les ménages du groupe 2 sont représentés sur cette figure.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1																
2	99	100				13	47	49	52	55	58	61				
3					45	14	48	50	53	56	59	62			107	
4					46										108	
5			102		6					105	106					
6							104									
7					8			25	89							
8			103		9				36					65	68	69
9						17					37	38	42	66		
10	86	101				18		51	54	57	60	63	64	67		

6 à 89: lieu de localisation

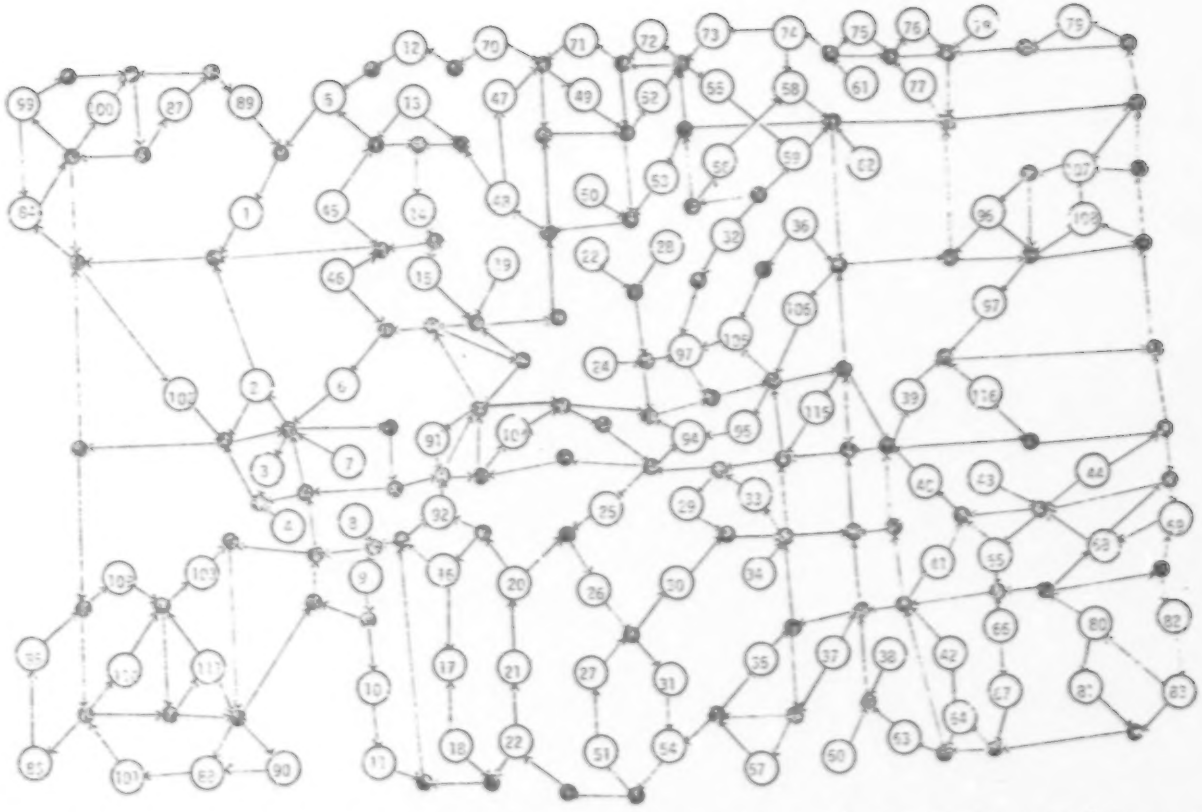
91 à 108: lieu de service

Les ensembles S_3 et D_3, respectivement lieux de localisation potentiels et lieux de service pour les ménages du groupe 3 sont représentés sur cette figure

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1							70	71	72	73	74	75	76	78	79	
2							42	43	52	55	58	61	77			
3																
4																
5						112	113				106			97		
6								114			115			116		
7						32								43		
8		109				16									68	69
9		110	111												80	82
10															81	83

16 à 106: lieu de localisation

109 à 116: lieu de service



Cette figure représente la configuration urbaine (réseau G), où les quartiers et les carrefours du réseau principal sont représentés par les ronds et les arcs du réseau de transport par les traits.

Le paragraphe suivant présente les surfaces de plancher disponibles aux divers lieux.

Surfaces de plancher disponibles

lieu	surface	lieu	surface	lieu	surface
1	4000	29	3764	57	8200
2	4983	30	7888	58	1470
3	4983	31	9300	59	3768
4	2890	32	8300	60	1987
5	9287	33	5700	61	5780
6	2673	34	4655	62	7800
7	4673	35	9100	63	5660
8	5673	36	5788	64	6600
9	2736	37	3456	65	7640
10	4763	38	4500	66	9000
11	8263	39	7600	67	9500
12	2789	40	3456	68	9700
13	1763	41	9000	69	5670
14	7364	42	4800	70	6600
15	7100	43	2355	71	8763
16	3787	44	3500	72	2673
17	3000	45	7600	73	2345
18	2673	46	5300	74	6789
19	3789	47	3400	75	3765
20	6344	48	7833	76	7400
21	5000	49	3788	77	3500
22	5674	50	2800	78	7630
23	8377	51	8100	79	8700
24	9263	52	9800	80	6500
25	7000	53	3570	81	5900
26	6888	54	7800	82	4700
27	8346	55	5700	83	9500
28	8767	56	3600		

Le paragraphe suivant présente les fonctions de coût associées aux divers lieux et aux arcs du réseau de transport.

Fonctions de coûts

La fonction de coût $c_a(.)$ associée à un arc a du réseau de transport est:

$$c_a(v_a) = \gamma \ell e^{\lambda v_a}$$

où ℓ est la "longueur" de l'arc, v_a le nombre de voyages sur l'arc, γ et λ des paramètres empiriques.

La fonction de coût $c_a(.)$ associée à un lieu de localisation s est:

$$c_s(h_s) = \bar{\alpha}(A_s)h_s^{\beta}$$

où A_s est la surface disponible en s, h_s le nombre de ménages localisés en s, β un paramètre empirique et $\bar{\alpha}(.)$ une fonction qui à une surface A_s associé au coût exprimant ce que le premier ménage localisé en ce lieu doit payer.

Nous donnons dans la section suivante un bref aperçu du code, écrit en Fortran CDC 6600, utilisé pour cet exemple.

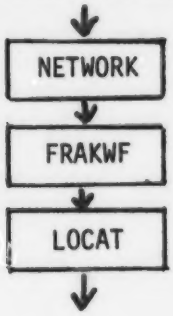
5.3 Le programme

Le code, en Fortran CDC 6600, écrit pour résoudre le problème (P5) est composé de trois routines:

- la routine NETWORK construit le réseau G^* à partir d'une description du réseau initial G et des quartiers;
- la routine FRKAWF (Frank and Wolfe) résout le problème de flot à coût minimum sur G^* (les coûts sur les arcs de G^* sont non-linéaires)

- la routine LOCAT (localisation) déduit des flots sur les arcs de G* les localisations cherchées.

L'enchaînement des trois routines est le suivant:



Pour une application du code à la planification urbaine (réelle), il peut être avantageux d'introduire dans ce schéma une flèche allant de la sortie de LOCAT à l'entrée de NETWORK, ceci représentant par exemple une implantation interactive du code. Le paragraphe suivant présente la complexité en espace mémoire de l'ordinateur, du code.

5.4 Complexité en espace mémoire

L'extension de G à G* consomme de l'espace mémoire. Si N et A sont le nombre de sommets et le nombre d'arcs respectivement de la configuration urbaine initiale, S_k et D_k le nombre de lieux de localisation potentiels et de lieux de services respectivement, pour les ménages du groupe k, S le nombre total de lieux de localisation potentiels et K le nombre de groupes de ménages, alors le graphe G* a N* sommets et A* arcs où

$$N^* = N + S + 2*K$$

$$A^* = A + S + \sum_{k=1}^{K} (S_k + D_k)$$

Lorsqu'on passe d'un problème à un autre, les paramètres dans les formules de définition de N* et A* ci-dessus qui varient sont: N, A, S, K, S_k, D_k; chacun de ces paramètres contribue de façon additive à la formule dans laquelle il est utilisé, ce qui veut dire que l'implantation de G* en mémoire ne pose aucun problème critique.

La série des tableaux qui suit présente les résultats obtenus pour une série de paramètres [illegible] et β

5.5 Série de résultats

Les trois tableaux qui suivent présentent les localisations obtenues pour $\bar{\alpha}(A_s) = A_s^2$ et $\beta = 0.90$

Groupe 1

lieu	# localisés	lieu	# localisés
1	0	23	0
2	1964	24	2802
3	0	25	2611
4	0	26	0
5	0	27	0
6	0	28	0
7	2520	29	3570
8	0	30	0
9	0	31	0
10	0	32	0
11	0	33	3603
12	0	34	3912
13	0	35	0
14	0	36	2335
15	0	37	0
16	2185	38	0
17	0	39	0
18	0	40	0
19	0	41	0
20	2800	42	0
21	0	43	0
22	0	44	3692

Groupe 2

lieu	# localisés	lieu	# localisés
6	2815	53	0
8	1824	54	0
9	2884	55	0
13	3056	56	0
14	0	57	1707
17	0	58	0
18	2040	59	0
37	2189	60	1968
38	0	61	0
42	0	62	1534
45	0	63	0
46	2188	64	0
47	0	65	0
48	0	66	0
49	0	67	0
50	0	68	0
51	2789		
52	0		

Groupe 3

lieu	# localisés	lieu	# localisés
43	1181	73	0
47	0	74	0
49	1313	75	0
52	0	76	920
55	0	77	1689
58	0	78	0
61	0	79	0
68	1673	80	1312
69	1833	81	1094
70	0	82	1224
71	0	83	1024
72	1730		

Les tableaux de cette page présentent les nombres totaux de ménages localisés aux différents lieux (les paramètres sont: $\bar{\alpha}(A_s) = A_s^2$, $\beta = 0.90$)

lieu	# localisés
1	0
2	1964
3	0
4	0
5	0
6	2815
7	2520
8	1824
9	2884
10	0
11	0
12	0
13	3056
14	0
15	0
16	2185
17	0
18	2040
19	0
20	2800
21	0
22	0
23	0
24	2802
25	2611
26	0
27	0
28	0

lieu	# localisés
29	3570
30	0
31	0
32	0
33	3603
34	3912
35	0
36	2335
37	2189
38	0
39	0
40	0
41	0
42	0
43	1181
44	3692
45	0
46	2188
47	0
48	0
49	1313
50	0
51	2789
52	0
53	0
54	0
55	0
56	0

lieu	# localisés
57	1707
58	0
59	0
60	1968
61	0
62	1534
63	0
64	0
65	0
66	0
67	0
68	1673
69	1833
70	0
71	0
72	1730
73	0
74	0
75	0
76	920
77	1689
78	0
79	0
80	1312
81	1094
82	1224
83	1024

Ces trois tableaux présentent la distribution des ménages aux divers lieux (pour chaque groupe de ménages)

Groupe 1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1																
2																
3																
4											2885					
5				1964				2802								
6					2520											
7								2611	3970	3603					3692	
8						2185	2800			2339						
9																
10																

Groupe 2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1																
2						3056										
3												1534				
4					2188											
5					2815											
6																
7					1824											
8					2884											
9											2189					
10						2040		2789		1707	1968					

Groupe 3

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1													920			
2								1313	1730				1685			
3																
4																
5																
6																
7														1181		
8															1673	1833
9															1312	1224
10															1094	1024

Ce tableau représente la distribution des ménages aux divers lieux (pour les trois groupes de ménages)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1									1730				920			
2						3056		1313					1689			
3												1534				
4					2188						2335					
5				1964	2815			2802								
6					2580											
7					1824			2611	3570	3603				1181	3692	
8					2884	2185	2800			3912					1673	1833
9												2189			1312	1224
10						2040		2789		1707	1968				1094	1024

Les tableaux de cette page présentent le nombre de ménages allant vers les divers lieux de services équivalents (les paramètres sont: $\bar{\alpha}(A_s) = A_s^2$, $\beta = 0.90$)

Groupe 1		Groupe 2		Groupe 3	
lieu	employés	lieu	employés	lieu	employés
29	7482	2	2815	16	1833
33	3603	3	2884	92	0
84	1964	25	0	97	2610
85	0	29	1707	106	0
86	0	30	2789	109	0
87	0	32	2189	110	1094
88	0	36	0	111	0
89	0	86	0	112	3519
90	0	99	2188	113	0
91	2520	100	3056	114	0
92	4986	101	1824	115	3043
93	2802	102	0	116	2897
94	2611	103	0		
95	2335	104	2040		
96	0	105	1968		
97	0	106	0		
98	3692	107	1534		
		108	0		

Les trois tableaux qui suivent présentent les localisations obtenues pour $\bar{\alpha}(A_s) = A_s^2$ et $\beta = 2.50$

Groupe 1

lieu	# localisés	lieu	# localisés
1	0	23	0
2	3009	24	2265
3	0	25	2602
4	0	26	0
5	0	27	0
6	0	28	0
7	3386	29	2898
8	0	30	0
9	0	31	0
10	0	32	0
11	0	33	2925
12	0	34	2726
13	0	35	0
14	0	36	2808
15	0	37	0
16	2708	38	0
17	0	39	0
18	0	40	0
19	0	41	0
20	2658	42	0
21	0	43	0
22	0	44	4008

Groupe 2

lieu	# localisés
6	2285
8	2194
9	2645
13	2033
14	0
17	0
18	0
37	1770
38	0
42	0
45	0
46	2076
47	0
48	0
49	0
50	0
51	2264
52	0
53	0

lieu	# localisés
54	2130
55	0
56	0
57	2115
58	0
59	0
60	3131
61	0
62	0
63	2351
64	0
65	0
66	0
67	0
68	0
69	0

Groupe 3

lieu	# localisés	lieu	# localisés
43	1410	73	0
47	0	74	0
49	1062	75	0
52	0	76	1587
55	0	77	1371
58	0	78	0
61	0	79	0
68	1358	80	1246
69	1278	81	1878
70	0	82	0
71	1219	83	1269
72	1316		

Le tableau de cette page présente les nombres totaux de ménages localisés aux différents lieux (les paramètres sont: $\bar{\alpha}(A_s) = A_s^2$, $\beta = 2.50$)

lieu	# localisés	lieu	# localisés	lieu	# localisés
1	0	29	2898	57	2115
2	3009	30	0	58	0
3	0	31	0	59	0
4	0	32	0	60	3131
5	0	33	2925	61	0
6	2285	34	2726	62	0
7	3386	35	0	63	2351
8	2194	36	2808	64	0
9	2645	37	1770	65	0
10	0	38	0	66	0
11	0	39	0	67	0
12	0	40	0	68	1358
13	2033	41	0	69	1278
14	0	42	0	70	0
15	0	43	1410	71	1219
16	2708	44	4008	72	1316
17	0	45	0	73	0
18	0	46	2076	74	0
19	0	47	0	75	0
20	2658	48	0	76	1587
21	0	49	1062	77	1371
22	0	50	0	78	0
23	0	51	2264	79	0
24	2265	52	0	80	1246
25	2602	53	0	81	1878
26	0	54	2130	82	0
27	0	55	0	83	1269
28	0	56	0		

Les tableaux de cette page présentent le nombre de ménages allant vers les divers lieux de services équivalents (les paramètres sont: $\bar{\alpha}(A_s) = A_s^2$, $\beta = 2.50$)

Groupe 1	
lieu	# employés
29	5625
33	2925
84	3009
85	0
86	0
87	0
88	0
89	0
90	0
91	3386
92	5366
93	2265
94	2602
95	2808
96	0
97	0
98	4008

Groupe 2	
lieu	# employés
2	2285
3	2645
25	0
29	2115
30	4395
32	4121
36	0
86	0
99	2076
100	2033
101	2194
102	0
103	0
104	0
105	3131
106	0
107	0
108	0

Groupe 3	
lieu	# employés
16	0
92	0
97	2958
106	0
109	0
110	0
111	0
112	4868
113	0
114	0
115	3125
116	4047

Les trois tableaux qui suivent présentent les localisations obtenues pour $\bar{\alpha}(A_s) = 1/A_s$ et $\beta = 0.90$

Groupe 1

lieu	# localisés	lieu	# localisés
1	0	23	0
2	2488	24	3485
3	0	25	0
4	0	26	0
5	0	27	0
6	0	28	0
7	1870	29	4441
8	0	30	0
9	0	31	0
10	0	32	0
11	0	33	7632
12	0	34	0
13	0	35	0
14	0	36	2600
15	0	37	0
16	2700	38	0
17	0	39	0
18	0	40	0
19	0	41	0
20	3483	42	0
21	0	43	0
22	0	44	3296

Groupe 2

lieu	# localisés	lieu	# localisés
6	3501	54	0
8	2031	55	0
9	2575	56	0
13	0	57	2109
14	0	58	0
17	0	59	0
18	0	60	789
37	2723	61	0
38	0	62	0
42	0	63	0
45	0	64	0
46	6126	65	0
47	0	66	0
48	0	67	0
49	0	68	0
50	1671	69	0
51	3469		
52	0		
53	0		

Groupe 3

lieu	# localisés
43	1003
47	0
49	1634
52	0
55	0
58	0
61	0
68	2081
69	0
70	0
71	0
72	1545

lieu	# localisés
73	0
74	0
75	0
76	1166
77	2101
78	0
79	0
80	2509
81	1218
82	473
83	1265

Le tableau de cette page présente les nombres totaux de ménages localisés aux différents lieux (les paramètres sont: $\bar{\alpha}(A_s) = 1/A_s$, $\beta = 0.90$)

lieu	# localisés	lieu	# localisés	lieu	# localisés
1	0	29	4441	57	2109
2	2488	30	0	58	0
3	0	31	0	59	0
4	0	32	0	60	789
5	0	33	7632	61	0
6	3501	34	0	62	0
7	1870	35	0	63	0
8	2031	36	2600	64	0
9	2575	37	2723	65	0
10	0	38	0	66	0
11	0	39	0	67	0
12	0	40	0	68	2081
13	0	41	0	69	0
14	0	42	0	70	0
15	0	43	1003	71	0
16	2700	44	3296	72	1545
17	0	45	0	73	0
18	0	46	6126	74	0
19	0	47	0	75	0
20	3483	48	0	76	1166
21	0	49	1634	77	2101
22	0	50	1671	78	0
23	0	51	3469	79	0
24	3485	52	0	80	2509
25	0	53	0	81	1218
26	0	54	0	82	473
27	0	55	0	83	1265
28	0	56	0		

Les tableaux de cette page présentent le nombre de ménages allant vers les divers lieux de services équivalents (les paramètres sont $\bar{\alpha}(A_s) = 1/A_s$, $\beta = 0.90$)

Groupe 1		Groupe 2		Groupe 3	
lieu	# employés	lieu	# employés	lieu	# employés
29	4441	2	3501	16	0
33	7632	3	2575	92	0
84	2488	25	1944	97	3267
85	0	29	2899	106	0
86	0	30	3469	109	0
87	0	32	2723	110	1218
88	0	36	0	111	0
89	0	86	0	112	4250
90	0	99	2721	113	0
91	1870	100	0	114	0
92	6183	101	2031	115	3178
93	3485	102	0	116	3084
94	0	103	0		
95	2600	104	1461		
96	0	105	1671		
97	0	106	0		
98	3296	107	0		
		108	0		

Les trois tableaux qui suivent présentent les localisations obtenues pour $\bar{\alpha}(A_s) = 1/A_s$, $\beta = 2$

Groupe 1

lieu	# localisés	lieu	# localisés
1	0	23	0
2	2005	24	3618
3	0	25	2028
4	0	26	0
5	0	27	0
6	0	28	0
7	1765	29	4609
8	0	30	0
9	0	31	0
10	0	32	0
11	0	33	4652
12	0	34	780
13	0	35	0
14	0	36	2699
15	0	37	0
16	2802	38	0
17	0	39	0
18	0	40	0
19	0	41	0
20	3615	42	0
21	0	43	0
22	0	44	3422

Groupe 2

lieu	# localisés	lieu	# localisés
6	3634	54	0
8	2108	55	0
9	2673	56	0
13	0	57	2189
14	0	58	0
17	0	59	0
18	609	60	1379
37	2826	61	0
38	0	62	0
42	0	63	0
45	0	64	0
46	4409	65	0
47	0	66	0
48	0	67	0
49	0	68	0
50	1566	69	0
51	3601		
52	0		
53	0		

Groupe 3

lieu	# localisés
43	950
47	0
49	1696
52	0
55	0
58	0
61	0
68	2160
69	0
70	0
71	0
72	1604

lieu	# localisés
73	0
74	0
75	0
76	939
77	2180
78	0
79	0
80	2522
81	1265
82	363
83	1313

Le tableau de cette page présente les nombres totaux de ménages localisés aux différents lieux (les paramètres sont $\bar{\alpha}(A_s) = 1/A_s$, $\beta = 2$)

lieu	# localisés	lieu	# localisés	lieu	# localisés
1	0	29	4609	57	2189
2	2005	30	0	58	0
3	0	31	0	59	0
4	0	32	0	60	1379
5	0	33	4652	61	0
6	3634	34	780	62	0
7	1765	35	0	63	0
8	2108	36	2699	64	0
9	2673	37	2826	65	0
10	0	38	0	66	0
11	0	39	0	67	0
12	0	40	0	68	2160
13	0	41	0	69	0
14	0	42	0	70	0
15	0	43	950	71	0
16	2802	44	3422	72	1604
17	0	45	0	73	0
18	609	46	4409	74	0
19	0	47	0	75	0
20	3615	48	0	76	939
21	0	49	1696	77	2180
22	0	50	1566	78	0
23	0	51	3601	79	0
24	3618	52	0	80	2522
25	2028	53	0	81	1265
26	0	54	0	82	365
27	0	55	0	83	1313
28	0	56	0		

Les tableaux de cette page présentent le nombre de ménages allant vers les divers lieux de service équivalents (les paramètres sont: $\bar{\alpha}(A_s) = 1/A_s$, $\beta = 2$)

Groupe 1		Groupe 2		Groupe 3	
lieu	# employés	lieu	# employés	lieu	# employés
29	5390	2	3634	16	0
33	4652	3	2673	92	365
84	2005	25	609	97	3120
85	0	29	2189	106	0
86	0	30	3601	109	0
87	0	32	2826	110	1265
88	0	36	0	111	0
89	0	86	0	112	3837
90	0	99	2824	113	0
91	1765	100	0	114	0
92	6418	101	2108	115	3299
93	3618	102	0	116	3111
94	2028	103	0		
95	2699	104	1584		
96	0	105	2945		
97	0	106	0		
98	3422	107	0		
		108	0		

5.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre un exemple de taille réaliste; la non-disponibilité des données réelles nous a amené à construire un exemple hypothétique. Les algorithmes de résolution des problèmes de flots à coûts convexes permettent de traiter efficacement les problèmes de taille plusieurs fois celle de l'exemple et la complexité en espace mémoire de l'ordinateur des structures d'informations pour l'implantation du code développé n'est pas un facteur critique; essentiellement ce chapitre se veut être une démonstration aux planificateurs urbains du fait qu'un code opérationnel pour traiter les modèles développés existe.

CONCLUSION

Nous avons étudié le problème de prévision de l'utilisation du sol dans un contexte urbain et celui de planification de l'utilisation du sol. Pour chacun des problèmes, les difficultés ont été mises en relief, des hypothèses posées et des modèles mathématiques basés sur ces hypothèses construits. Dans le chapitre quatrième, nous avons présenté certaines difficultés fondamentales inhérentes aux problèmes formulés; ce sont des difficultés classiques de l'optimisation et beaucoup de travaux y ont été consacrés sans amélioration décisive.

Notre contribution dans le domaine de l'étude des phénomènes urbains a été essentiellement la construction de formulations pouvant être résolues sur ordinateur par des méthodes de résolution éprouvées et pouvant être utilisées pour les problèmes de grande taille.

Dans le domaine de la planification urbaine, on ne peut pas dire maintenant que le problème de grandeur de mémoire d'ordinateur ou de temps de calcul est une limitation critique. Le vrai problème maintenant réside au niveau de la construction de modèles mathématiques cohérents et à leur utilisation effective dans des travaux réels de planification. Nous pensons que ce travail peut être suivi de deux types d'autres travaux: d'abord l'expérimentation sur des données d'une ville réelle et ensuite l'intégration des modèles développés avec les modèles dynamiques de planification urbaine.

APPENDICE

ALGORITHME POUR LA PROGRAMMATION CONVEXE (FRANK AND WOLFE)

Considérons le problème suivant:

$$\text{Min } f(h)$$

$$\text{s.a. } Ah = b$$

$$h \geq 0$$

où $h \in E^n$, A est une matrice de mxn et f est une fonction convexe de E^n dans E'. Nous allons présenter l'algorithme de Frank et Wolfe pour la résolution de ce problème; les preuves de convergence de cet algorithme sont données dans Zangwill [38]. L'algorithme est le suivant:

Etape 1

Choisir le paramètre de tolérance ε.

Choisir une solution réalisable initiale h', $n \leftarrow 1$.

Etape 2

Résoudre le problème:

$$\text{Min } \nabla f(h^n)Y$$

$$\text{s.a. } AY = b$$

$$Y \geq 0$$

soit Y^n la solution obtenue; poser $d^n = Y^n - h^n$.

Etape 3

Si $| \nabla f(h^n) | > \varepsilon$

alors résoudre le problème:

$$\underset{0 \le \lambda \le 1}{\text{Min}} \{f(h^n + \lambda d^n)\}$$

Soit λ^n la solution obtenue;

faire $h^{n+1} \leftarrow h^n + \lambda^n d^n$

$n \leftarrow n+1$

aller à l'étape 2,

sinon arrêter.

REMERCIEMENTS

Je remercie très sincèrement Monsieur le professeur Michael Florian à qui je dois beaucoup depuis mes études en maîtrise; comme directeur de recherches, ses conseils et critiques m'ont été d'une très grande importance tout au long de ce travail; comme tuteur, il m'a aidé à confectionner mon programme du Département d'Informatique et plus généralement à organiser mon séjour ici.

Je remercie très vivement Monsieur Marc Los pour les nombreuses critiques et suggestions ainsi que pour la patience avec laquelle il a supervisé ce travail; je lui dois en plus des conseils techniques, toute mon initiation aux problèmes urbains.

J'ai beaucoup apprécié l'atmosphère au Centre de recherche sur les transports et au Département d'Informatique; le climat y était très propice à l'apprentissage et à la recherche.

J'ai bénéficié tout au long de mes études graduées d'une bourse de l'Agence Canadienne de Développement International et d'une subvention du Centre de recherche sur les transports; je remercie Mademoiselle Thérèse Beauregard, gestionnaire des bourses de l'ACDI, pour les nombreux accommodements.

Madame Madeleine Constantin s'est chargée de la dactylographie de ma thèse; elle a fait un excellent travail et je lui suis très reconnaissant.

REFERENCES

[1] Alonso, W.J., "Location and Land Use: Towards a General Theory of Land Rent", Harvard University Press, Massachusetts, 1968.

[2] Bellman, R.E., "Applied Dynamic Programming", Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1957.

[3] Benayoun, R., Tergny, J., "Critères multiples en programmation mathématique: une solution dans le cas linéaire", Revue Française d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, V-2, pp. 31-56, 1969.

[4] Chou, W., Kershenbaum, A., "A Unified Algorithm for Designing Multidrop Teleprocessing Networks", dans"Advances in Computer Communications", Artech House, 1976.

[5] Dafermos, S.C., "Integrated Equilibrium Flow Models for Transport Planning", dans "Traffic Equilibrium Methods", Proceedings of the International Symposium, University of Montreal, Springer-Verlag, 1976.

[6] Dantzig, G.B., "Linear Programming and Extensions", Princeton, New Jersey, 1963.

[7] Denardo, E.V., "Dynamic Programming: Theory and Applications", unpublished.

[8] Dionne, R., "Une analyse théorique et numérique du problème de choix optimal d'un réseau de transport sans congestion"; thèse Ph.D.; publication # 27, Centre de recherche sur les transports, publication # 198, Département d'Informatique, Université de Montréal, 1974

[9] Dixit, A., "The Optimum Factory Town", The Bell Journal of Economics and Management Science, Vol. 4, # 2, pp. 635-651, 1973.

[10] Dyer, S.J. A Time-Sharing Computer Program for the Solution of the Multiple Criteria Problem", Management Science, Vol. 19, # 12, pp. 1374-1383, 1973

[11] Frank, M., Wolfe, P., "An Algorithm for Quadratic Programming", Naval Res. Log. Quart., Vol. 3, pp. 95-110, 1956

[12] Geoffrion, A.M., Dyer, J.S., Feinberg, A., "An Interactive Approach for Multi-Criterion Optimization with an Application to the Operation of an Academic Department", Management Science, Vol. 19, # 4, pp. 357-368, 1972.

[13] Goldsteine, E. Youdine, D., "Problèmes particuliers de programmation linéaire", Editions Mir, Miscou, 1973.

[14] Herbert, J.D., Stevens, B.H., "A Model for the Distribution of Residential Activity in Urban Areas", Journal of Regional Science, Vol. 2, # 2, pp. 22-36, 1960.

[15] Hopkins, L.D., "Plan, Projection, Policy: Mathematical Programming and Planning Tehory", Environement and Planning, Vol. 6, pp. 419-430, 1974.

[16] Ingram, G.F. et al., "The Detroit Prototype of NBER Urban Simulation Model", Columbia University, New York, 1972.

[17] Karlvist, A., Lundqvist, F., Snickars, F., "Dynamic Allocation of Urban Space", Saxon House, Lexington Books, 1975.

[18] Leblanc, L.J., "Mathematical Programming Algorithms for Large Scale Network Equilibrium and Design Problems"; Ph.D. Dissertation, Department of Industrial Engineering and Management Sciences, Northwestern University, 1973.

[19] Leblanc, L.J., "An Algorithm for the Discrete Network Design Problem", Transportation Science, Vol. 9, # 3, pp. 183-199, 1975.

[20] Los, M. "Simultaneous Optimization of Land-Use and Transportation in New Town Design", thèse Ph.D., University of Pennsylvania, 1975.

[21] Lundqvist, L., "Integrated Location-Transportation Analysis: A Decomposition Approach", Regional and Urban Economics, Vol. 3 # 3, pp. 233-262, 1973.

[22] Lundqvist, L., "Transportation Analysis and Activity Location in Land-Use Planning with Application to the Stockholm Region"; dans "Dynamic Allocation of Urban Space", pp. 227-258, Saxon House, Lexington Books, 1975.

[23] Lundqvist, L., Karlqvist, A., "A Contact Model for Spatial Allocation", Regional Studies, Vol. 6, pp. 401-419, 1972.

[24] Mangasarian, O.L., "Non Linear Programming", McGraw-Hill, 1969.

[25] Markowitz, H., "The Optimisation of a Quadratic Function Subject to Linear Constraints", Nav. Res. Log. Wuart., Vol. 3, pp. 111-133, 1956.

[26] Mills, E.S., Mackinnon, J., "Notes on the New Urban Economics", Bell Journal of Economics and Management Science, Vol. 4, # 2, 1973.

[27] Mills, E.S., "Markets and Efficient Ressource Allocation in Urban Areas", Swedish Journal of Economics, Vol. 74, # 1, pp. 100-117, 1972

[28] Mirrlees, J.A., "The Optimum Town", Swedish Journal of Economics, Vol. 74, # 1, pp. 114-135, 1972.

[29] Nemhauser, G.L., Sherwood, C.F.J., "Temporary Expansion of a Transportation Network", Transportation Science, Vol. 6, pp. 306-323, 1972.

[30] Nguyen, S., "Une approche unifiée des méthodes d'équilibre pour l'affectation du trafic", thèse Ph.D., Université de Montréal 1974.

[31] Oron, Y., Pines, D., Sheshinski, E., "Optimum vs Equilibrium Land Use Pattern and Congestion Toll", The Bell Journal of Economics and Management Science, Vol. 4, # 2, pp. 619-636, 1973.

[32] Shah, S.M. Saxena, S.C., "Introeuction to Real Variable Theory", Intext Educational Publishers, 1972.

[33] Solow, R.M., "Congestion Cost and the Use of Land for Streets", The Bell Journal of Economics and Management Science", Vol. 4, # 2, pp. 602-618, 1973.

[34] Solow, R.M., "Congestion, Density and the Use of Land in Transportation", Swedish Journal of Economics, Vol. 84, # 1, pp. 161-173, 1972.

[35] Wheaton, C.W., "Linear Programming and Locational Equilibrium: The Herbert-Stevens Revisited", Journal of Urban Economics, Vol. 1, pp. 278-287, 1974.

[36] Wheaton, C.W., "Income and Urban Location", thèse Ph.D., University of Pennsylvania, 1972.

[37] Wolfe, P., "Convergence Theory in Nonlinear Programming", dans "Integer and Nonlinear Programmong", édité par J. Abadie, North-Holland, 1970

[38] Zangwill, W.I., "Nonlinear Programming: A Unified Approach", Prentice Hall, 1969.